Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Produto Misto

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Nesta aula, estudaremos uma operação que associa a cada trio de vetores de $\mathbb{R}^3$ um número, chamada *produto misto* dos três vetores.

1 Breve observação sobre determinantes

Nesta aula, iremos usar fortemente a ideia de determinante. Por isso, vamos fazer uma breve apresentação dos determinantes e de como calculá-los.

Podemos interpretar os determinantes como um modo de denotar organizadamente expressões que dependem de somas e produtos. O mais importante é perceber que os determinantes admitem interpretações geométricas relevantes, algumas das quais serão estudadas nesta aula.

Dados n^2 elementos, podemos organizá-los na forma de uma tabela com n linhas e n colunas, que geralmente chamamos de *matriz*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para cada elemento a_{ij}, o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna às quais esse elemento pertence (com linhas numeradas de cima para abaixo e colunas da esquerda para a direita). Chamamos o número natural n de **ordem** da matriz. O **determinante** da matriz A é denotado por $\det A$, ou usando-se barras verticais em vez de parênteses:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se A é uma matriz de ordem n, dizemos que $\det A$ é um *determinante de ordem* n.

Determinantes de ordem 1 são definidos como números: se $A = (a_{11})$ é uma matriz de ordem 1, então

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

Se a ordem de um determinante é $n \geq 2$, calculamos o determinante usando o seguinte *algoritmo recursivo*[1], conhecido como *desenvolvimento de Laplace*[2]:

(1) Dada uma matriz A, escolhe-se uma linha ou uma coluna dessa matriz. Aqui, vamos supor que foi escolhida a linha (horizontal) i de A: $a_{i1}, \ldots, a_{in}$:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right).$$

(2) Para cada elemento a_{ij}, seja A_{ij} a matriz de ordem $n-1$, obtida a partir de A pela exclusão da linha i e da coluna j.

(3) Para cada elemento a_{ij}, pomos $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

(4) O determinante de A é igual a

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Pode ser provado que o número calculado com os passos acima é sempre o mesmo, independentemente da linha ou coluna escolhida.

Os dois exemplos a seguir serão tudo o que precisaremos para o restante desta aula.

Exemplo 1. *Para calcular o determinante da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

aplicamos o desenvolvimento de Laplace ao longo da primeira linha de A. Assim fazendo, obtemos:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Nesse caso, é fácil lembrar o resultado final: simplesmente multiplicamos os elementos da diagonal principal e, em seguida, subtraímos do resultado o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo 2. *Calculamos o determinante da matriz de ordem 3*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

da mesma maneira. A título de ilustração, desta vez aplicamos o desenvolvimento de Laplace ao longo da terceira coluna de A:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \\ &\quad + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \\ &\quad + a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

[1] Dizemos que um algoritmo é *recursivo* quando cada novo passo utiliza os passos anteriores. Em nosso caso, para calcular determinantes de matrizes de ordem n, precisamos já saber calcular determinantes de matrizes de ordem $n-1$.

[2] Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827), matemático, astrônomo e físico francês.

Executando os cálculos acima com o auxílio do resultado do exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\det A &= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &\quad + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

2 Definição de produto misto

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores em $\mathbb{R}^3$. O **produto misto** desses três vetores, nesta ordem, é o número real $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, definido por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}), \tag{1}$$

onde $\cdot$ indica produto escalar e $\times$ indica produto vetorial.

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, recorde inicialmente que

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Portanto, aplicando o desenvolvimento de Laplace pela primeira linha da matriz acima, obtemos

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)\,\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\,\vec{j} \\ &\quad + (v_1w_2 - v_2w_1)\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Lembrando agora da expressão do produto escalar em coordenadas, chegamos a

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) \\ &\quad + u_3(v_1w_2 - v_2w_1).\end{aligned}$$

Por fim, comparando a última expressão acima com aquela obtida no Exemplo 2 para determinantes de matrizes de ordem 3, concluímos que o produto misto pode ser calculado pelo determinante a seguir:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

O produto misto admite duas interpretações relevantes: uma geométrica e outra física, as quais passamos a descrever:

Interpretação geométrica: na aula sobre produto vetorial, vimos que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $|\vec{v} \times \vec{w}|$. Por outro lado, vimos também que a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é igual à altura do paralelepípedo P determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (veja a Figura 1).

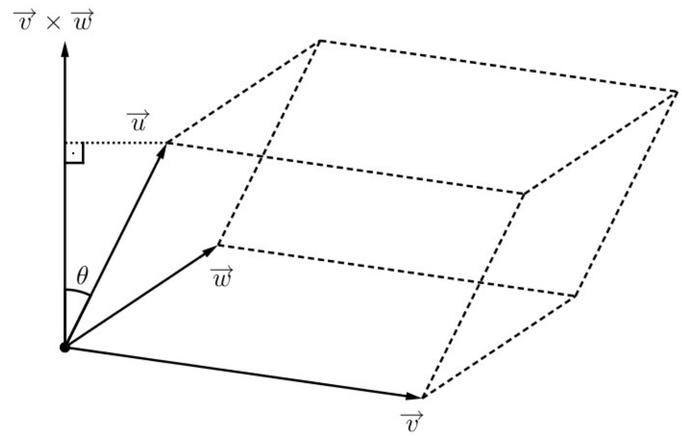

Figura 1: o paralelepípedo determinado por três vetores.

Nas notações da Figura 1, essa projeção é dada por $|\vec{u}|\cos\theta$. Assim, o volume do paralelepípedo P é igual a

$$\underbrace{|\vec{v} \times \vec{w}|}_{\text{área da base}}\ \underbrace{|\vec{u}|\cos\theta}_{\text{altura}} = \left|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right| = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|,$$

onde utilizamos (1) na última igualdade.

O quadro abaixo resume nossa discussão até aqui.

O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao valor absoluto do produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Interpretação física: suponha que um fluido (água, por exemplo) passa através de um buraco que tem o formato do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na figura 2. O *fluxo* de fluido através desse paralelogramo é definido como o volume de fluido que passa por ele, calculado por unidade de tempo:

$$\text{Fluxo} = \frac{\text{Volume de fluido}}{\text{Tempo}}.$$

Suponha que o vetor $\vec{u}$ indica a velocidade (constante, medida em metros por segundo) com que o fluido atravessa o paralelogramo.

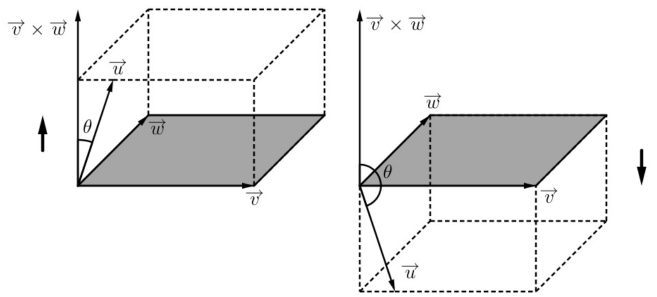

Figura 2: o fluido que atravessa o paralelogramo em um segundo forma um paralelepípedo reto. O sentido em que ele flui corresponde ao sinal do produto misto dos três vetores.

Apenas a componente do vetor $\overrightarrow{u}$ que aponta na direção perpendicular ao plano gerado por $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tem influência na passagem do fluido através do paralelogramo. Essa componente tem a direção de $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ e módulo igual a $|\overrightarrow{u}|\cos\theta$ (veja novamente a Figura 2). Portanto, o *sentido* do fluxo é determinado pelo sinal de $\cos\theta$.

Como $|\overrightarrow{u}|\cos\theta$ indica a intensidade e o sentido da velocidade do fluido, concluímos que, em 1 segundo, uma coluna de fluido com o formato de um paralelepípedo reto de altura $|\overrightarrow{v}||\cos\theta|$ passa através do paralelogramo. O sentido em que essa coluna de fluido passa é determinado pelo sinal de $\cos\theta$. Seu volume, por sua vez, é calculado por

$$\underbrace{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}|}_{\text{área da base}} \cdot \underbrace{|\overrightarrow{u}|\cos\theta}_{\text{altura com sinal}} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u}$$

Uma vez que $(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, chegamos ao resultado a seguir.

> O produto misto $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ dos vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ indica o *fluxo* de um fluido, com velocidade constante igual a $\overrightarrow{u}$, através do paralelogramo determinado por $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. O sinal de $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ indica o sentido do fluxo.

A seguir, veremos algumas propriedades do produto misto, as quais decorrem imediatamente de propriedades análogas válidas para determinantes.

(1) Se dois dos três vetores em um produto misto são iguais, então o produto é igual a zero:

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}] = 0.$$

Vamos mostrar que $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$. As outras igualdades podem ser obtidas de forma análoga. Temos de (3) que

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\
&= v_1(v_2w_3 - v_3w_2) + v_2(v_3w_1 - v_1w_3) \\
&\quad + v_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\
&= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2 + v_2v_3w_1 - v_2v_1w_3 \\
&\quad + v_3v_1w_2 - v_3v_2w_1 = 0.
\end{aligned}$$

Apelando para a interpretação física do produto misto, podemos interpretar a propriedade (1) da seguinte maneira: se o primeiro vetor se repete, então a velocidade do fluido é paralela ao plano determinado pelos outros dois vetores e, por isso, nenhum fluido atravessa o paralelogramo. Por outro lado, se os dois vetores é direita são iguais, então a área do paralelogramo é zero e nenhum fluido passa por ele, pois não há abertura. Em qualquer caso, o fluxo é nulo.

(2) Para quaisquer $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, temos

$$[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}],$$

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}]$$

e

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}'] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}'].$$

Essa propriedade segue das propriedades análogas do produto escalar e do produto vetorial, que já vimos nas aulas dedicadas a esses produtos, neste módulo. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \big(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'\big) \cdot \big(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\big) \\
&= \overrightarrow{u} \cdot \big(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\big) + \overrightarrow{u}' \cdot \big(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\big) \\
&= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}].
\end{aligned}$$

(3) Se trocarmos a posição de dois dos três vetores em um produto misto, então o produto muda de sinal. Por exemplo:

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}].$$

Essa propriedade pode ser deduzida das propriedades (1) e (2). De fato, observemos que, pela propriedade (1), temos

$$[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0,$$

pois há repetição de vetores. De posse desse resultado, basta usar as propriedades (1) e (2) repetidas vezes para chegar à conclusão desejada:

$$\begin{aligned}
0 &= [\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \\
&= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \\
&= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \\
&= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}].
\end{aligned}$$

(4) Valem as *igualdades cíclicas*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}].$$

Realmente, cada um dos produtos mistos acima pode ser obtido a partir dos outros dois por duas trocas de posiçoes de elementos. Pela propriedade (3), cada troca equivale a uma mudança de sinal, de forma que duas trocas correspondem a duas mudanças de sinal, ou seja, à manutenção do sinal. Por exemplo,

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] \\ &= -\big(-[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]\big) \\ &= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].\end{aligned}$$

3 O determinante de Gram

Nesta seção, estudaremos uma construção, devida ao matemático dinamarquês Jørgen Pedersen Gram (1850-1916), chamada o *determinante de Gram*.

Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em $\mathbb{R}^3$ que não têm a mesma direção, vamos encontrar uma expressão para a área do paralelogramo P determinado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Para tanto, consideremos o vetor $\vec{c}$, com $|\vec{c}| = 1$, perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O valor absoluto do produto misto $[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$ é o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, sendo numericamente igual à área A_P do paralelogramo P (veja a Figura 3).

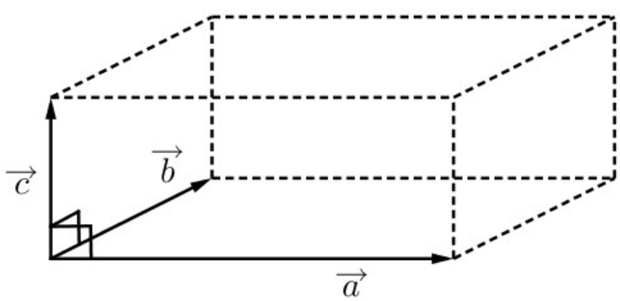

Figura 3: o paralelepípedo com altura 1 tem volume numericamente igual à área da base.

Portanto, se $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, temos

$$A_P = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Essa última igualdade pode ser verificada diretamente, usando-se a definição de determinante de uma matriz de ordem 3, conforme apresentada no Exemplo 2.

Multiplicando esses dois últimos determinantes, obtemos

$$\begin{aligned} A_P^2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1c_1 + c_2c_2 + c_3c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, como $|\vec{c}| = 1$, temos que $\vec{c} \cdot \vec{c} = 1$ (veja a aula sobre produto escalar, neste módulo). Também, uma vez que $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, temos $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Portanto, o último determinante pode ser reescrito como

$$A_P^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & 0 \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix},$$

onde a última igualdade é uma verificação direta, com o auxílio dos resultados dos exemplos 1 e 2.

Denotamos

$$G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}$$

e chamamos esse determinante de **determinante de Gram** dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Para três vetores quaisquer $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ (isto é, com $\vec{c}$ não necessariamente unitário ou perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$), o determinante correspondente é

$$G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix},$$

sendo também chamado *determinante de Gram* de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. É possível provar que ele é igual ao quadrado do volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Observação 3. *O determinante de Gram de quatro vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ em $\mathbb{R}^3$ é dado por*

$$G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{d} \\ \vec{d}\cdot\vec{a} & \vec{d}\cdot\vec{b} & \vec{d}\cdot\vec{c} & \vec{d}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}.$$

Esse determinante é sempre igual a zero, e uma justificativa "geométrica" *vem do fato de que ele é igual ao quadrado do "volume" do sólido determinado por esses quatro vetores, visto como vetores em $\mathbb{R}^4$. Entretanto, uma vez* *que os quatro vetores estão de fato em $\mathbb{R}^3$, o "sólido" por eles determinado tem "volume" igual a zero, considerando-se esse "volume" como uma medida em $\mathbb{R}^4$.*

Uma justificativa algébrica simples reside no fato de que, para quatro vetores em $\mathbb{R}^3$, pelo menos um deles pode ser escrito como uma soma de múltiplos dos outros três, digamos

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Então, utilizando propriedades elementares de determinantes, temos

$$\begin{aligned} G(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}) &= \alpha \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{a} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{a} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{a} \\ \vec{d}\cdot\vec{a} & \vec{d}\cdot\vec{b} & \vec{d}\cdot\vec{c} & \vec{d}\cdot\vec{a} \end{vmatrix} \\ &+ \beta \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{b} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{b} \\ \vec{d}\cdot\vec{a} & \vec{d}\cdot\vec{b} & \vec{d}\cdot\vec{c} & \vec{d}\cdot\vec{b} \end{vmatrix} \\ &+ \gamma \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{c} \\ \vec{d}\cdot\vec{a} & \vec{d}\cdot\vec{b} & \vec{d}\cdot\vec{c} & \vec{d}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} \\ &= \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

uma vez que cada uma dos três últimos determinantes tem duas colunas iguais.

4 O teorema de Van der Waerden sobre pentágonos no espaço

Nesta seção, aplicamos o determinante de Gram a um belíssimo resultado de Geometria Espacial. Para o enunciado do mesmo, lembramos que um polígono é chamado *planar* se estiver inteiramente contido em um plano, ou seja, se todos os seus lados estiverem contidos em um mesmo plano. Caso contrário, ele é chamado *reverso*.

Todo triângulo é planar, pois os seus três vértices determinam um único plano. No entanto, para todo inteiro $n \geq 4$ existem polígonos reversos com $n \geq 4$ lados.

Se todos os lados de um polígono (planar ou reverso) têm um mesmo comprimento, dizemos que o polígono é *equilátero*. Se os ângulos entre os lados consecutivos de um polígono (novamente, planar ou reverso) têm todos uma mesma medida, dizemos que o polígono é *equiangular*. Mesmo impondo essas duas condições de regularidade sobre um quadrilátero, ele ainda pode ser reverso (veja a Figura 4).

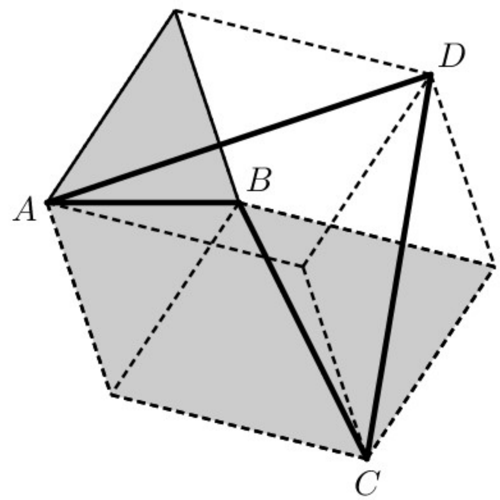

Figura 4: o quadrilátero reverso $ABCD$, obtido a partir de diagonais de faces de um cubo como na figura, é equilátero e equiangular, mas não é planar.

Também é possível mostrar que, para todo $n \geq 6$, existem polígonos reversos equiláteros e equiangulares com n lados.

No final da década de 1960, o matemático holandês Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996), após conversas com o químico Jack David Dunitz (1923 -), da univeridade de Zurique, descobriu que o pentágono é a única exceção[3].

Teorema 4 (B.L. Van der Waerden(1970)). *Um pentágono em $\mathbb{R}^3$ que tem todos os lados e todos os ângulos iguais é necessariamente planar.*

Prova. (S. Smakal) Vamos assumir, sem perda de generalidade, que a medida de cada lado do pentágono é igual a 1. Sejam $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ e $\vec{a}_5$ vetores que são lados do pentágono, como na Figura 5, à direita. Então,

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = |\vec{a}_i|^2 = 1 \tag{4}$$

para $1 \leq i \leq 5$ e

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = 0. \tag{5}$$

Além disso, para cada $1 \leq i \leq 5$, o ângulo entre $\vec{a}_i$ e $\vec{a}_{i+1}$ (com a convenção de que $\vec{a}_6 = \vec{a}_1$) é igual a $180° - \theta$, onde θ é a medida comum dos ângulos internos do pentágono (veja novamente a Figura 5, à direita). Portanto,

$$\begin{aligned} \vec{a}_i \cdot \vec{a}_{i+1} &= |\vec{a}_i||\vec{a}_{i+1}|\cos(180° - \theta) \\ &= \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \end{aligned} \tag{6}$$

[3] O resultado já era suspeitado pelos químicos há cerca de 25 anos, sendo ligado ao estudo da difração de elétrons do arsenometano gasoso, $(AsCH_3)_n$. Ele também já havia sido publicado em um jornal da antiga URSS (em russo) em 1961, inspirado em um problema proposto por V. Arnold em 1957.

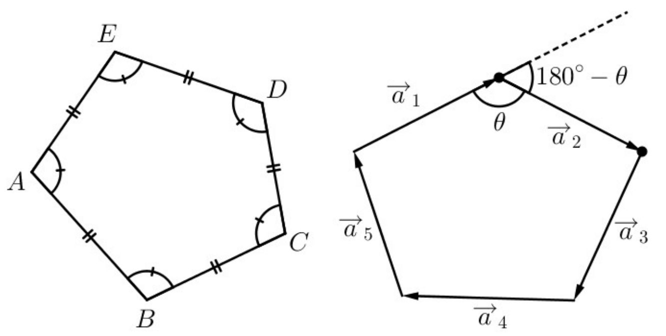

Figura 5: um pentágono equilátero e equiangular é necessariamente planar.

para $1 \leq i \leq 5$

Por simplicidade de notação, escrevamos $c = -\cos\theta$. Fazendo o produto escalar da igualdade (5) sucessivamente com $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_4$ e $\overrightarrow{a}_5$ e levando em conta as relações (4) e (6), obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_3 + \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_4 & = & -2c-1 \\ \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{a}_4 + \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{a}_5 & = & -2c-1 \\ \overrightarrow{a}_3 \cdot \overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_3 \cdot \overrightarrow{a}_5 & = & -2c-1 \\ \overrightarrow{a}_4 \cdot \overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_4 \cdot \overrightarrow{a}_2 & = & -2c-1 \\ \overrightarrow{a}_5 \cdot \overrightarrow{a}_2 + \overrightarrow{a}_5 \cdot \overrightarrow{a}_3 & = & -2c-1 \end{array}\right. \tag{7}$$

Da primeira e da terceira equações de (7), segue que $\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_4 = \overrightarrow{a}_3 \cdot \overrightarrow{a}_5$; da segunda e da quarta equações, temos $\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_4 = \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{a}_5$; por fim, da terceira e da quinta equações, segue que $\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{a}_5$. Juntando todas essas informações, concluímos imediatamente que

$$\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_4 = \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{a}_4 = \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{a}_5 = \overrightarrow{a}_3 \cdot \overrightarrow{a}_5 = -c - \frac{1}{2}.$$

Agora, como todos os vetores envolvidos estão em $\mathbb{R}^3$, a Observação 3 implica $G(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_4) = 0$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & c & -c-\frac{1}{2} & -c-\frac{1}{2} \\ c & 1 & c & -c-\frac{1}{2} \\ -c-\frac{1}{2} & c & 1 & c \\ -c-\frac{1}{2} & -c-\frac{1}{2} & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando esse último determinate com o auxílio do desenvolvimento de Laplace (veja a Seção 1), obtemos

$$\frac{5}{16}(4c^2 + 2c - 1)^2 = 0. \tag{8}$$

Consideremos, agora, o determinante de Gram $G(\overrightarrow{a}_i, \overrightarrow{a}_{i+1}, \overrightarrow{a}_{i+2})$, onde os vetores $\overrightarrow{a}_i$, $\overrightarrow{a}_{i+1}$ e $\overrightarrow{a}_{i+2}$, correspondem a três lados consecutivos do pentágono. Os índices são considerados "modulo 5", o que significa que, se um índice i é maior do que 5, devemos substituí-lo pelo resto que ele deixa quando dividido por 5. Por exemplo, para $i = 4$, temos $G(\overrightarrow{a}_i, \overrightarrow{a}_{i+1}, \overrightarrow{a}_{i+2}) = G(\overrightarrow{a}_4, \overrightarrow{a}_5, \overrightarrow{a}_1)$.

A definição de determinante de Gram para matrizes de ordem 3 fornece facilmente

$$\begin{aligned} G(\overrightarrow{a}_i, \overrightarrow{a}_{i+1}, \overrightarrow{a}_{i+2}) &= \begin{vmatrix} 1 & c & -c-\frac{1}{2} \\ c & 1 & c \\ -c-\frac{1}{2} & c & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{4}(2c+3)(4c^2+2c-1). \end{aligned}$$

Mas, por (8), temos $4c^2 + 2c - 1 = 0$, de sorte que

$$G(\overrightarrow{a}_i, \overrightarrow{a}_{i+1}, \overrightarrow{a}_{i+2}) = 0$$

para $1 \leq i \leq 5$. Por sua vez, isso significa que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{a}_i$, $\overrightarrow{a}_{i+1}$, $\overrightarrow{a}_{i+2}$ é igual a zero, de forma que cada trio de lados consecutivos do pentágono deve estar contido no mesmo plano. Isso prova que o pentágono inteiro está contido em um plano. □

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula. Se a sua turma nunca teve contato com a noção de determinante, será necessário pelo menos mais uma aula.

O uso de determinantes é incontornável aqui. Mesmo a expressão do produto misto em função das coordenadas dos vetores é dada como um determinante. Embora os determinates já tenham sido usados na aula sobre produto vetorial, a necessidade de sua aplicação mais sistemática nos forçou a fazer uma breve introdução desse conceito na Seção 1.

Por outro lado, as noções de produto misto e de determinante de Gram, dadas nesta aula, bem como suas interpretações geométricas e físicas e a aplicação à geometria (Teorema de Van der Waerden), servem como motivação ao estudo dos determinantes. Você tem, portanto, uma oportunidade de introduzir a noção de determinante com uma forte motivação geométrica.

A ligação entre os determinantes de Gram e o produto misto se dá através de sua interpretação como volume. O determinante de Gram de ordem 4 fornece uma medida em $\mathbb{R}^4$, ou seja, uma extensão da noção de volume para dimensão 4. Nesta aula, precisamos apenas do caso degenerado, isto é, o caso em que esse volume em dimensão 4 é igual a zero. Alternativamente, a demonstração algébrica apresentada, ainda que menos elegante, prescinde desse argumento geométrico em $\mathbb{R}^4$

De modo análogo, você pode explorar os determinantes de Gram de ordem 3 para determinar quando quatro pontos pontos são coplanares, ou seja, quando três vetores "pertencem a um mesmo plano" (em outras palavras, quando eles são *linearmente dependentes*). Isso dá margem à introdução, de modo geométrico, da noção de dependência linear, tão importante na Álgebra Linear.

O Teorema de Van der Waerden, sobre a planaridade de pentágonos equiláteros e equiangulares revela-se um dos mistérios da Natureza: dentre os polígonos com pelo menos quatro lados, apenas o pentágono tem essa propriedade. As conexões desse teorema com a Química, embora sejam profunda e não elementares, podem ser exploradas como motivação.

Sugestões de Leitura Complementar

1. N. M. dos Santos et al. *Vetores e Matrizes: Uma Introdução à Álgebra Linear*. Cengage Learning, São Paulo, 2007.
2. M. R. Spiegel. *Análise Vetorial*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1972.