Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Resolução de Exercícios - Parte 1

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

7 de Março de 2025

Neste material e nos próximos, resolveremos vários exemplos envolvendo a noção de função e suas propriedades básicas, as quais foram estudadas na aula *Funções - Noções Básicas*, partes 1 a 4.

Exemplo 1. *Considere a função* $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, dada por* $s(a, b) = a + b$*. Essa função associa, a cada par* (a, b) *de números naturais, sua soma* $a + b$*. Em geral, se* A *for um conjunto não vazio e* $b : A \times A \to A$ *for uma função dada, dizemos que* b *é uma* ***operação binária*** *definida sobre* A*.*

As operações de adição, multiplicação, subtração e divisão são operações binárias, mas elas nem sempre estão bem definidas sobre um determinado conjunto. Nesse sentido, pergunta-se:

(a) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, dada por* $f(a, b) = a - b$*, é uma função?*

(b) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $g(x, y) = \dfrac{x}{y}$*, é uma função?*

Solução.
(a) $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(a, b) = a-b$ *não* é uma função, pois existem elementos do domínio que não têm imagem. Por exemplo, $f(1, 2) = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$, logo $(1, 2)$ não tem imagem.

(b) Uma vez que a divisão por 0 não tem sentido matemático, g não está definida para pares ordenados do tipo $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$. Em particular, g não é função. $\square$

Exemplo 2. *Quantas funções* $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ *existem?*

Solução. Os valores de $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$ podem ser $1, 2, 3$ ou 4. Dessa forma, temos quatro possibilidades para a imagem de cada um dos três elementos do domínio. Para cada uma das quatro possíveis escolhas para $f(1)$, temos quatro possibilidades para $f(2)$. Para cada uma das $4 \times 4 = 16$ escolhas de $f(1)$ e $f(2)$, temos ainda 4 possibilidades para $f(3)$. Portanto, há um total de $4 \times 4 \times 4 = 64$ funções f do conjunto $\{1, 2, 3\}$ para o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. $\square$

Exemplo 3. *Quantas funções $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ existem?*

Solução. Os valores de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ podem ser 1, 2 ou 3. Dessa forma, temos três possibilidades para a imagem de cada um dos quatro elementos do domínio. Para cada uma das três possíveis escolhas para $f(1)$, temos três possibilidades para $f(2)$. Para cada uma das $3 \times 3 = 9$ escolhas para $f(1)$ e $f(2)$, também temos três possibilidades para $f(3)$. Por fim, para cada uma das $3\times3\times3 = 27$ escolhas para $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$, também temos três possibilidades para $f(4)$. Portanto, há um total de $3\times3\times3\times3 = 81$ funções f do conjunto $\{1,2,3,4\}$ para o conjunto $\{1,2,3\}$. □

O próximo exemplo é um desdobramento do Exemplo 2.

Exemplo 4. *Quantas funções $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ são injetivas?*

Solução. Podemos escolher $f(1)$ como um qualquer dos quatro elementos de $\{1,2,3,4\}$. Feita essa escolha, o elemento do contradomínio que foi escolhido não pode ser imagem de outro elemento do domínio, pois f deve ser injetiva. Logo, restam três opções para $f(2)$ (qualquer elemento do conjunto $\{1,2,3,4\}$, exceto aquele escolhido para ser $f(1)$). Analogamente, uma vez escolhidos $f(1)$ e $f(2)$, sobram duas opções para $f(3)$. Portanto, a quantidade de funções injetivas de $\{1,2,3\}$ em $\{1,2,3,4\}$ é $4 \times 3 \times 2 = 24$. □

Observação 5. *O problema de contar o número de funções $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ injetivas é bastante simples: não há nenhuma função com essa propriedade. Isso porque, se houvesse uma tal função, então $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ deveriam ser elementos distintos do conjunto $\{1,2,3\}$; mas isso não é possível, uma vez que $\{1,2,3\}$ só tem três elementos.*

Você também pode estar se perguntando se é possível contar o número de funções sobrejetivas *de um conjunto finito em outro.*

Por exemplo, quantas são as funções sobrejetivas $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$? Nesse caso, a resposta também é simples: não há funções sobrejetivas entre esses dois conjuntos, *pois, se houvesse, então* $\{1,2,3,4\} = \mathrm{Im}(f) = \{f(1), f(2), f(3)\}$, *o que é impossível (um conjunto tem quatro elementos mas o outro tem no máximo três).*

Um problema bem mais complicado — e fora do alcance destas notas — seria o de contar o número de funções sobrejetivas $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$*. Caso você tenha ficado interessado, veja o Exemplo 2.6 da referência [3].*

Exemplo 6. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é tal que* $f(1) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 4$ *e* $f(x+y) = f(x)f(y)$*, para todos* $x, y \in \mathbb{R}$*. Calcule o valor de* $f(3+\sqrt{2})$*.*

Solução. Fazendo $x = 1$ e $y = \sqrt{2}$ na relação dada no enunciado, obtemos

$$f(1+\sqrt{2}) = f(1)f(\sqrt{2}) = 8.$$

Da mesma forma, com $x = 1+\sqrt{2}$ e $y = 1$ ficamos com

$$f(2+\sqrt{2}) = f(1)f(1+\sqrt{2}) = 2 \cdot 8 = 16$$

e, com $x = 2+\sqrt{2}$ e $y = 1$ chegamos a

$$f(3+\sqrt{2}) = f(1)f(2+\sqrt{2}) = 2 \cdot 16 = 32.$$

$\square$

Exemplo 7. *A função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é definida por*

$$f(n) = n^{\underline{o}} \textit{ natural que não é quadrado perfeito.}$$

Por exemplo, $f(1)$ *é o primeiro natural que não é quadrado perfeito, logo,* $f(1) = 2$*;* $f(2)$ *é o segundo natural que não é quadrado perfeito, logo,* $f(2) = 3$*;* $f(3) = 5$ *e assim por diante. Calcule* $f(100)$*.*

Solução. Por definição, $f(100)$ é o centésimo natural que não é quadrado perfeito. Para calculá-lo, listamos os naturais, riscamos os quadrados perfeitos e identificamos o centésimo natural que não foi riscado:

$$\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, 6, 7, 8, \cancel{9}, 10, \ldots, \cancel{n^2}, n^2+1, \ldots, \cancel{(n+1)^2}, \ldots$$

Como há

$$(n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n$$

números entre n^2 e $(n+1)^2$, e

$$2+4+6+8+\ldots+18 = 90 < 100$$

mas

$$2+4+6+8+\ldots+18+20 = 110 > 100,$$

concluímos que há 90 naturais não quadrados antes de 10^2, que há 110 naturais não quadrados antes de 11^2, e que o centésimo natural que não é quadrado é o décimo ($10 = 100-90$) natural após 10^2. Portanto, $f(100) = 110$. $\square$

Exemplo 8. *Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva. Se $b \in B$, denotamos por $f^{-1}(b)$ o conjunto formado por todos os elementos de A cuja imagem é b, ou seja,*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

*Nesse caso, dizemos que $f^{-1}(b)$ é a **imagem inversa de b por f**.*

(a) *Se $f : \mathbb{Z}_+ \to \{0,1,2\}$ é dada por $f(n) = r$, onde r é o resto da divisão de n por 3, explicite as imagens inversar $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(2)$.*

(b) *Mostre que $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ e, se $b \neq b'$, então $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$.*

(c) *Mostre que A é igual à união de todos os conjuntos $f^{-1}(b)$, à medida que o elemento b varia no conjunto B.*

Solução.
(a) Pela definição dada no enunciado, o conjunto $f^{-1}(0)$ é formado pelos números inteiros não negativos que têm imagem 0, isto é, que deixam resto 0 quando divididos por 3. Assim, tal conjunto é formado pelos inteiros não negativos que são múltiplos de 3:

$$f^{-1}(0) = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}.$$

Sucintamente,

$$f^{-1}(0) = \{3k;\, k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

O conjunto $f^{-1}(1)$ é formado pelos inteiros não negativos que têm imagem 1, isto é, que deixam resto 1 quando divididos por 3:

$$f^{-1}(1) = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}.$$

Observando que os elementos do conjunto $f^{-1}(1)$ são obtidos somando-se 1 aos elementos de $f^{-1}(0)$, podemos escrever

$$f^{-1}(1) = \{3k + 1;\, k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Finalmente, o conjunto $f^{-1}(2)$ é formado pelos inteiros não negativos que deixam resto 2 quando divididos por 3, de sorte que

$$f^{-1}(2) = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\} = \{3k + 2;\, k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

(b) Inicialmente, como f é sobrejetiva, para cada $b \in B$ deve existir pelo menos um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como tal elemento a, por definição, pertence ao conjunto $f^{-1}(b)$, temos $f^{-1}(b) \neq \emptyset$.

Se existisse $x \in f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b')$, teríamos $f(x) = b$ e $f(x) = b'$, logo, $b = b'$. Mas, como $b \neq b'$, concluímos que não pode existir um elemento nessa interseção, ou seja, $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$.

(c) Se $x \in A$, então $f(x) \in B$. Denotando $f(x)$ por b, temos $x \in f^{-1}(b)$. Isso significa que A está contido na união dos conjuntos do tipo $f^{-1}(b)$, com $b \in B$.

Por outro lado, uma vez que para cada $b \in B$ tem-se (por definição) $f^{-1}(b) \subset A$, concluímos que a união dos conjuntos do tipo $f^{-1}(b)$, com $b \in B$, está contida em A.

Portanto A é *igual* à união dos conjuntos do tipo $f^{-1}(b)$, com $b \in B$. $\square$

Observação 9. *Ainda em relação ao exemplo anterior e a título de ilustração, observe que a conclusão do item (c), aplicada ao exemplo do item (a), pode ser escrita como*

$$\mathbb{Z}_+ = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)$$

e significa simplesmente que todo inteiro não negativo deixa resto 0*,* 1 *ou* 2 *quando dividido por* 3*.*

Também, o leitor atento pode ter ficado um pouco confuso com a notação $f^{-1}(b)$*, uma vez que a função* f*, sendo somente sobrejetiva, não necessariamente possui uma inversa. O ponto é que* a mesma notação é usada para duas coisas distintas*:*

- *Se* $f : A \to B$ *for uma função* bijetiva *e* $f^{-1} : B \to A$ *for sua inversa, então, para* $b \in B$*, definimos* $f^{-1}(b)$ *como o* elemento *de* A *que é imagem de* b *pela função* f^{-1}*.*

- *Se* $f : A \to B$ *for uma função* sobrejetiva*, então, para* $b \in B$*, definimos* $f^{-1}(b)$ *como o* subconjunto *de* A *formado pelos elementos que têm imagem* b *pela função* f*.*

Essas duas notações são comuns, mas na prática, não tendem a causar confusão, uma vez que, de saída, o contexto deve deixar claro se $f : A \to B$ *é uma bijeção (e, portanto,* f^{-1} *se refere à sua* função inversa*) ou se* $f : A \to B$ *é uma sobrejeção (e, portanto,* $f^{-1}(b)$ *se refere à* imagem inversa de b pela função f*).*

Exemplo 10. *Se* $f : A \to B$ *é uma função injetiva e* $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ *é a imagem de* f*, então* $f : A \to f(A)$ *é uma função bijetiva. Neste caso, podemos identificar o conjunto* A *com sua imagem* $f(A)$*, o que equivale a ver* A *como um subconjunto do conjunto* B*. Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = (x, 0)$*.*

(a) *A função* f *é injetiva? Justifique sua resposta!*

(b) *Encontre a imagem de* f*.*

(c) *Existem outras maneiras de identificar $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?*

Solução.
(a) Se x e x' forem números reais tais que $f(x) = f(x')$, então $(x, 0) = (x', 0)$, logo, $x = x'$. Isso significa que a função f é injetiva.

(b) A imagem de f é o conjunto $f(\mathbb{R}) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Esse conjunto é uma reta no plano cartesiano, que coincide com o eixo das abscissas.

(b) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $g(x) = (0, x)$, é uma identificação de $\mathbb{R}$ com uma reta vertical, que coincide com o eixo das ordenadas no plano cartesiano.

Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (x, ax + b)$, é uma função injetiva (verifique isso!), cuja imagem é uma reta no plano cartesiano.

Mais geralmente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função, então $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (x, f(x))$, também é uma função, ademais injetiva. Logo, $\mathbb{R}$ pode ser identificado com o gráfico de f, com cada elemento $x \in \mathbb{R}$ sendo identificado com o ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 11. *Uma função $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função par** se $P(-x) = P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma função $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função ímpar** se $I(-x) = -I(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A esse respeito, faça os seguintes itens:*

(a) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função qualquer, mostre que a função $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, é uma função par.*

(b) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função qualquer, mostre que a função $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, é uma função ímpar.*

(c) *Mostre que qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita, de maneira única, como a soma de uma função par com uma função ímpar.*

Solução.
(a) Para verificarmos que P é uma função par, vamos calcular $P(-x)$: trocando x por $-x$ na definição de P, obtemos

$$\begin{aligned} P(-x) &= \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} \\ &= \frac{f(-x)+f(x)}{2} \\ &= P(x). \end{aligned}$$

Assim, $P(-x) = P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e P é realmente uma função par.

(b) Como no item anterior, devemos calcular $I(-x)$, o que também fazemos trocando x por $-x$ na definição de I:

$$\begin{aligned} I(-x) &= \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} \\ &= \frac{f(-x)-f(x)}{2} \\ &= -\frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ &= -I(x). \end{aligned}$$

Assim, $I(-x) = -I(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que significa que I é uma função ímpar.

(c) Para mostrar que é possível escrever f como a soma de uma função par com uma função ímpar, basta notar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = P(x) + I(x),$$

em que P e I são as funções definidas nos itens anteriores. Ora, já sabemos que P é uma função par e I é uma função ímpar.

Para mostrar que essa é a única maneira de representar f como a soma de uma função par com uma função ímpar, suponha que se tenha $f = g + h$, em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

e

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

Somando e subtraindo membro a membro as duas igualdades acima, obtemos respectivamente

$$f(x) + f(-x) = 2g(x) \;\text{ e }\; f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = P(x)$$

e

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = I(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = P$ e $h = I$. □

Para o próximo exemplo, você pode achar útil reler o Exemplo 15 do material "Noções Básicas - Parte 1" desse módulo, relativo à função parte fracionária.

Exemplo 12. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* **periódica***, se existir um real $a > 0$ tal que $f(x+a) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se f for periódica e existir um real $p > 0$* mínimo *e tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, dizemos que p é o* ***período*** *da função f. A esse respeito, faça os seguintes itens:*

(a) *Mostre que a função parte fracionária, que associa a cada número real x a sua parte fracionária $\{x\}$, é uma função periódica de período 1.*

(b) *A* ***função de Dirichlet*** *é a função $d : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, dada por*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Mostre que d é periódica, mas não tem período.

Prova.

(a) Denote por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função parte fracionária, de modo que $f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Primeiramente, vamos mostrar que $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, seja $n = \lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x. Sabemos que n é o único número inteiro tal que $n \leq x < n+1$. Somando 1 a essas desigualdades, obtemos $n+1 \leq x < n+2$, o que nos leva a concluir que $\lfloor x+1 \rfloor = n+1$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \{x+1\} \\ &= (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= (x+1) - (n+1) = x - n \\ &= x - \lfloor x \rfloor \\ &= \{x\} = f(x). \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que não existe $0 < a < 1$ tal que $f(x+a) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para tanto, note que $0 < 1-a < 1$ e tome $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1-a$. Então, $0 < a < x+a < 1$ e, como ambos x e $x+a$ estão entre 0 e 1, a parte inteira de ambos é igual a 0. Assim,

$$f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x - 0 = x$$

e, da mesma forma, $f(x+a) = x+a$. Mas, uma vez que $a > 0$, temos $x+a > x$, logo, $f(x+a) > f(x)$; isso mostra que a não pode ser o período de f.

(2) Se r for um número racional, então

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+r \in \mathbb{Q} \Rightarrow d(x) = d(x+r) = 1$$

e

$$x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x+r \notin \mathbb{Q} \Rightarrow d(x) = d(x+r) = 0.$$

Em qualquer caso, temos que $d(x+r) = d(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e isso mostra que a função d é periódica.

Entretanto, uma vez que existem números racionais positivos tão pequenos quanto queiramos (por exemplo $1/n$, com n natural), concluímos que não há um valor mínimo para r. Assim, a função d não tem período. $\square$

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir os exemplos aqui reunidos de modo superficial. Caso você queira deter-se um pouco mais em alguns deles, precisará de um pouco mais de tempo.

As referências [1], [2] e [4] contém muitos problemas adicionais sobre funções, de variados graus de dificuldade.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3. Introdução à Análise*. Terceira edição. SBM, Rio de Janeiro, 2023.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4. Combinatória*. Terceira edição. SBM, Rio de Janeiro, 2024.
4. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar*, vol. 1. Atual Editora, São Paulo, 2013.