Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Taxas de Variação - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de Maio de 2026

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, continuamos apresentado problemas sobre taxas relacionadas. A fim de simplificar os enunciados dos exemplos, suporemos que todas as funções consideradas no texto sejam deriváveis.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Se uma bolinha de naftalina evapora a uma taxa proporcional à área de sua superfície, mostre que seu raio decresce a uma taxa constante.*

Solução. Para cada instante t, sejam $r(t)$, $A(t)$ e $V(t)$ o raio, a área da superfície e o volume da bolinha de naftalina, respectivamente. Como sabemos,

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad A = 4\pi r^2$$

e, por hipótese, existe uma constante negativa k tal que $V' = k \cdot A$. (Note que k é negativa, uma vez que V decresce com o tempo, logo, $k \cdot A = V' \leq 0$.)

Por outro lado, aplicando a regra da cadeia, segue de $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ que $V'(t) = 4\pi r(t)^2 r'(t)$, logo,

$$V'(t) = A(t)r'(t).$$

Desse modo, $k \cdot A = r' \cdot A$ e a conclusão é de que $r' \equiv k$, ou seja, o raio r decresce a uma taxa constante. $\square$

Para o próximo exemplo, precisaremos da fórmula do volume V de uma calota esférica[1] $\mathcal{C}$ de raio R e altura h (veja a figura na próxima página):

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h). \tag{1}$$

[1] Para o volume de um sólido mais geral, veja o problema 10.17 da referência [2]. De fato, fazendo $r_1 = 0$ e $r_2 = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$ na fórmula desse problema, obtemos (1).

Exemplo 2. *Água está fluindo para dentro de um tanque hemisférico (emborcado para cima) de raio 3 m. Em cada instante, h e V denotam a profundidade da água no tanque e o volume de água no tanque, respectivamente.*

(*i*) *Calcule a taxa de variação de V em relação a h quando $h = 2$ m.*

(*ii*) *Se o tempo t for medido em segundos e a taxa de variação temporal de h for igual a $0,2$ m/s quando $h = 2$ m, calcule a taxa de variação temporal de V nesse mesmo instante.*

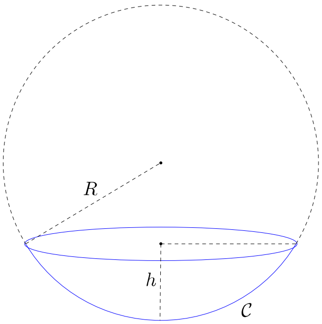

Figura 1: uma calota esférica $\mathcal{C}$ de raio R e altura h.

Solução. De acordo com (1), temos

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(3 \cdot 3 - h),$$

ou seja,

$$V(h) = 3\pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3}. \tag{2}$$

Derivando com respeito a h, obtemos

$$\frac{dV}{dh} = 6\pi h - \pi h^2,$$

o que, pela substituição de h por 2, dá

$$\left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=2} = 8\pi$$

metros cúbicos por metro.

Quanto ao item ()ii), basta derivar a relação (2) com respeito a t, utilizando a regra da cadeia:

$$V'(t) = \left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=h(t)} \cdot h'(t).$$

Assim, se t_0 for o instante em que $h(t_0) = 2$, então $h'(t_0) = 0,2$ (por hipótese) e, pelo item (i),

$$V'(t_0) = 8\pi \cdot 0,2 = 1,6\pi$$

metros cúbicos por segundo. □

Exemplo 3. *Os lados AB e AC de um triângulo ABC medem 4 m e 5 m, e a medida $\theta = \theta(t)$ do ângulo entre eles cresce a uma taxa de $0,06$ rad/s. Determine a taxa, relativamente ao comprimento a do lado BC, na qual a área está crescendo quando $\theta = \pi/3$ rad.*

Solução. Se $\mathcal{A}$ for a área de ABC, podemos considerar as medidas $a = a(\theta)$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\theta)$ como funções de $\theta = B\widehat{A}C$, em que $\theta \in (0, \pi)$.

Pela lei dos cossenos e a fórmula que expressa a área de um triângulo em função de dois lados e do ângulo compreendido (veja as seções 7.4 e 7.5 de [3]), temos

$$a^2 = 41 - 40\cos\theta \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = 10\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Em particular, quando $\theta = \pi/3$, obtemos $a(\pi/3) = \sqrt{21}$ m.

Derivando as relações acima com respeito a θ, vem que

$$2a(\theta)a'(\theta) = 40\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad \mathcal{A}'(\theta) = 10\cos\theta,$$

de sorte que, para $\theta = \pi/3$,

$$2\sqrt{21}a'(\pi/3) = 20\sqrt{3}, \quad \therefore \quad a'(\pi/3) = 10/\sqrt{7} \text{ m/s};$$

também,

$$\mathcal{A}'(\pi/3) = 5 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\theta} = \frac{d\mathcal{A}}{da} \cdot \frac{da}{d\theta},$$

fazendo concluir que

$$5 = \frac{d\mathcal{A}}{da}\bigg|_{a=\sqrt{21}} \cdot \frac{10}{\sqrt{7}}.$$

Assim, quando o ângulo entre os lados de comprimentos fixos for $\pi/3$ rad, a área de ABC estará variando, em relação ao comprimento de BC, a uma taxa de $\sqrt{7}/2$ m^2/m. $\square$

Exemplo 4. *O topo de uma escada de* $2,5$ *m de comprimento desliza sobre uma parede vertical a uma velocidade de* $0,5$ *m/s. Determine a velocidade de afastamento da base da escada em relação à parede quando a altura da escada for* $1,5$ *m.*

Solução. Sejam $h(t)$ e $d(t)$ a altura da escada e a distância da base da escada à parede, respectivamente, no instante t. Por hipótese, $dh/dt = -0,5$; pelo teorema de Pitágoras,

$$h(t)^2 + d(t)^2 = (2,5)^2, \tag{3}$$

para todo instante (admissível) t. Em particular, no instante t_0 em que $h(t_0) = 1,5$, devemos ter

$$d(t_0) = \sqrt{(2,5)^2 - (1,5)^2} = 2.$$

Para encerrar, devemos calcular a taxa $d'(t_0)$. Diferenciando a relação (3) com respeito ao tempo e avaliando no instante t_0, obtemos

$$h(t_0)h'(t_0) + d(t_0)d'(t_0) = 0,$$

de forma que

$$1,5 \cdot (-0,5) + 2d'(t_0) = 0 \quad \therefore \quad d'(t_0) = 0,375\,\text{m/s}.$$

Por conseguinte, a base da escada se afasta da parede a $0,375$ metros por segundo quando a altura da escada for $1,5$ metros. □

Exemplo 5. *Um holofote, localizado no ponto* $(-1, 0)$*, ilumina um ponto* P *que se move a* 10 *m/s no eixo das ordenadas. Determine a velocidade do ângulo de giro do holofote, em relação ao eixo das abscissas, no instante em que* P *está a* 8 *m da origem.*

Solução. Para cada instante t, sejam $\theta(t)$ a medida (em radianos) do ângulo entre o eixo do holofote e o eixo OX e $(0, s(t))$ a posição do ponto P. Então, $\operatorname{tg}\theta(t) = s(t)$, relação que, por derivação, fornece

$$\sec^2\theta(t) \cdot \theta'(t) = s'(t) = 10.$$

Utilizando a identidade $\sec^2 = \operatorname{tg}^2 + 1$, obtemos

$$\theta'(t) = \frac{10}{s(t)^2 + 1},$$

de sorte que, quando $s(t) = 8$, tem-se

$$\theta'(t) = 10/65 = 2/13.$$

Concluímos que, quando o ponto P estiver a 8 metros da origem, a velocidade do ângulo de giro do holofote será de $2/13$ radianos por segundo. □

No próximo exemplo utilizaremos o resultado do exemplo 7.34 de [3]: se $\mathcal{A}$ denotar a área de um triângulo ABC de semiperímetro p, então

$$\frac{\mathcal{A}}{p} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}, \tag{4}$$

ocorrendo a igualdade ocorre se, e só se, o triângulo ABC for equilátero.

Exemplo 6. *O semiperímetro $p = p(t)$ de um triângulo ABC está variando a uma taxa positiva de modo que, em um certo instante t_0, a área $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ de ABC assume um valor máximo. Estime o valor absoluto da taxa de variação do raio $r = r(t)$ do círculo inscrito em ABC, com relação a p, no instante t_0.*

Solução. O problema pede que se estime

$$\left.\frac{dr}{dp}\right|_{p=p(t_0)} = \frac{r'(t_0)}{p'(t_0)},$$

sendo a igualdade uma consequência da regra da cadeia.

Como t_0 é um instante de máximo para a função área $\mathcal{A}$, temos $\mathcal{A}'(t_0) = 0$; por outro lado, a fórmula $\mathcal{A} = pr$ fornece $\mathcal{A}' = p'r + pr'$. Portanto, avaliando a relação anterior em t_0 e multiplicando ambos os membros por $p(t_0)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= p'(t_0)(p(t_0)r(t_0)) + p(t_0)^2 r'(t_0) \\ &= \mathcal{A}(t_0)p'(t_0) + p(t_0)^2 r'(t_0), \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{r'(t_0)}{p'(t_0)} = -\frac{\mathcal{A}(t_0)}{p(t_0)^2}.$$

Pela estimativa (4), concluímos que

$$\left|\left.\frac{dr}{dp}\right|_{p=p(t_0)}\right| \le \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

□

Exemplo 7. *Os pontos*

$$b(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t) \quad e \quad c(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$$

descrevem movimentos circulares uniformes, segundo os círculos centrados na origem e de raios r e R, respectivamente, em que $r \neq 2R$. Determine o par de pontos $B = (x, 0)$ e $C = (y, 0)$, com $x, y > 0$, de tal forma que a seguinte *propriedade se verifique: para cada instante t, a razão entre as velocidades de aproximação (ou afastamento) de $b(t)$ e $c(t)$ em relação aos pontos C e B, respectivamente, é igual a 2.*

Solução. Sejam $d_b(t)$ e $d_c(t)$ as distâncias de $b(t)$ ao ponto C e de $c(t)$ ao ponto B, respectivamente. Pela fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, obtemos

$$d_b(t) = \sqrt{(r\cos t - y)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,t)^2} = \sqrt{-2ry\cos t + r^2 + y^2}$$

e, analogamente,

$$d_c(t) = \sqrt{-2Rx\cos t + R^2 + x^2}.$$

Assim, pela regra da cadeia,

$$d_b'(t) = \frac{ry\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{-2ry\cos t + r^2 + y^2}}$$

e

$$d_c'(t) = \frac{Rx\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{-2Rx\cos t + R^2 + x^2}}.$$

As igualdades acima garantem que a relação $d_b' = 2d_c'$ equivale a

$$\begin{aligned} &ry\sqrt{-2Rx\cos t + R^2 + x^2} = \\ &= 2Rx\sqrt{-2ry\cos t + r^2 + y^2} \end{aligned} \tag{5}$$

em cada instante $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Daí, elevando ambos os membros ao quadrado e efetuando algumas manipulações algébricas elementares, obtemos

$$2ryRx(4Rx - ry)\cos t + (ry)^2(R^2 + x^2) - (2Rx)^2(r^2 + y^2) = 0,$$

para aqueles mesmos instantes t. Como a função cosseno não é constante no intervalo $(0, \pi)$, a última igualdade só pode ocorrer se tivermos

$$2ryRx(4Rx - ry) = 0 \text{ e } (ry)^2(R^2 + x^2) - (2Rx)^2(r^2 + y^2) = 0.$$

Como x, y, r e R são positivos, a primeira igualdade acarreta $ry = 4Rx$. Substituindo essa informação na segunda igualdade, segue que $4(R^2 + (ry/4R)^2) = r^2 + y^2$ ou, ainda,

$$y^2 = \frac{4(2R)^2((2R)^2 - r^2)}{4((2R)^2 - r^2)} = (2R)^2.$$

Portanto,

$$y = 2R \;\text{ e }\; x = \frac{ry}{4R} = \frac{r}{2}.$$

Não é difícil verificar que esses valores para x e y garantem a validade da relação (5) para cada $t \neq k\pi$, de sorte que

$$B = (r/2, 0) \;\text{ e }\; C = (2R, 0)$$

constituem o único par de pontos para o qual a propriedade no enunciado se verifica.

$\square$

Dicas para o Professor

Em relação ao último exemplo, a condição $d_b' = 2d_c'$ significa que $d_b = 2d_c + k$ para alguma constante k. Quando $t = 0$, temos

$$d_b(0) = |2R - r| = 2|R - \frac{r}{2}| = 2d_c(0),$$

o que significa que $k = 0$.

A propriedade geométrica $d_b = 2d_c$ pode ser justificada de forma sintética. De fato, os pontos $P = (R, 0)$ e $Q = (-R, 0)$ são *conjugados harmônicos* relativamente ao segmento BC', em que $C' = (2R^2/r, 0)$ [2]. Com efeito,

$$\frac{BP}{PC'} = \frac{|R - r/2|}{|2R^2/r - R|} = \frac{r}{2R}$$

[2] Isso significa que P e Q dividem, interna e externamente, o segmento BC' na mesma razão; a esse respeito, veja a seção 9.2 da referência [3].

e, de forma similar,

$$\frac{BQ}{QC'} = \frac{r}{2R}.$$

Agora, seja Γ_R (resp. Γ_r) o círculo de raio R (resp. r) centrado na origem. Como o segmento PQ é um diâmetro de Γ_R, segue que Γ_R é o *círculo de Apolônio* sobre BC' na razão $r/2R$ [3].

Seja $O = (0, 0)$. Observando que os triângulos $COb(t)$ e $C'Oc(t)$ são semelhantes, a distância d entre $c(t)$ e C' satisfaz $d = \frac{R}{r} \cdot d_b(t)$. Mas, pela propriedade do círculo de Apolônio, também vale $\frac{d_c(t)}{d} = \frac{r}{2R}$, ou seja,

$$\frac{d_b(t)}{d} = \frac{2d_c(t)}{d};$$

assim, obtemos a relação desejada, $d_b(t) = 2d_c(t)$.

Tendo em vista os pré-requisitos de Geometria Euclidiana não usualmente presentes em sala de aula (mas que devem ser discutidos ao longo da apresentação), cremos que três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. J. Stewart. *Cálculo, volume* 1. 5ª ed. Thomson, 2006.

2. A. Caminha. *Geometria*, 2ª ed. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol.* 2. *Geometria Euclidiana Plana.* 3ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2024.

4. G. B. Thomas. *Cálculo, vol. 1.* 11ª ed. São Paulo: Pearson, 2009.

[3]Vide [3], seção 4.4.