Material Teórico - Módulo Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria

Interpretação Algébrica

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Dezembro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

Neste módulo veremos como transformações lineares de V, sendo V o espaço dos vetores no plano, se identificam a matrizes reais 2×2. Encerraremos estudando algumas aplicações lineares especiais.

1 Transformações Lineares e Matrizes

Você deve lembrar que todo sistema linear 2×2 admite uma forma matricial, isto é, um par de equações

$$\begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$$

pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Desse modo, se identificarmos uma matriz-coluna com o vetor cujas coordenadas são as entradas dessa matriz, o sistema acima pode ser interpretado como: *dados um vetor e uma matriz, existe algum vetor que se transforma por essa matriz no vetor dado?*

Talvez convenha introduzir alguma notação. Como dito, identificaremos o par ordenado (x,y) com a matriz-coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, o que é compatível com as operações de espaço vetorial. Se v é o vetor do plano de coordenadas x e y, escreveremos $[v] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Então, $[v + w] = [v] + [w]$ e $[k \cdot v] = k \cdot [v]$, para quaisquer $v,w \in V$ e para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

Se $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, temos uma correspondência entre matrizes-coluna definida por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Isso significa que uma aplicação $T_A : V \to V$ fica determinada por meio da igualdade $[T_A(v)] = A \cdot [v]$. Mais explicitamente, se v é o vetor de coordenadas x e y, então $T_A(v)$ é o vetor de coordenadas $ax + cy$ e $bx + dy$: $T_A(x,y) = (ax + cy, bx + dy)$. Observe que T_A é uma *aplicação linear*. Com efeito, nas notações acima,

$$\begin{aligned} [T_A(v + w)] &= A \cdot [v + w] \\ &= A \cdot ([v] + [w]) \\ &= A \cdot [v] + A \cdot [w] \\ &= [T_A(v)] + [T_A(w)] \\ &= [T_A(v) + T_A(w)], \end{aligned}$$

o que nos dá a igualdade $T_A(v+w) = T_A(v)+T_A(w)$. Veja que a distributividade da multiplicação de matrizes em relação à adição de matrizes foi utilizada no cálculo acima. A igualdade $T_A(k \cdot v) = k \cdot T_A(v)$ pode ser verificada de forma similar.

Com essas notações, se $u \in V$ é o vetor de coordenadas e e f, segue-se que o sistema (1) possui solução se, e só se, o vetor u pertence a imagem da transformação linear T_A.

Diremos que a aplicação linear T_A é *induzida pela matriz* A. Considerando os *vetores canônicos* $\mathbf{i} = (1,0)$ e $\mathbf{j} = (0,1)$, vale $[T_A(\mathbf{i})] = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $[T_A(\mathbf{j})] = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$. Portanto, os vetores $T_A(\mathbf{i})$ e $T_A(\mathbf{j})$ constituem, nessa ordem, as colunas da matriz A. Em particular, $T_A = T_B \Leftrightarrow A = B$.

A nossa primeira proposição nos garante que qualquer aplicação linear é induzida por uma (única) matriz.

Proposição 1. *Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Então existe uma única matriz A tal que $T = T_A$. De outro modo, existem números reais a,b,c e d, únicos, tais que $T(x,y) = (ax + cy, bx + dy)$, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $T(1,0) = (a,b)$ e $T(0,1) = (c,d)$, afirmamos que T é induzida pela matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, ou seja, vale $T(x,y) = (ax + cy, bx + dy)$ para quaisquer números reais x e y. Com efeito,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)) \\ &= x \cdot T(1,0) + y \cdot T(0,1) \\ &= x \cdot (a,b) + y \cdot (c,d) \\ &= (ax + cy, bx + dy), \end{aligned}$$

como queríamos. Como já observamos acima, A é a única matriz que induz a transformação linear T. $\square$

Diremos que A é a *matriz da transformação linear* T e escreveremos $A = [T]$. Logo, para qualquer vetor v, vale a igualdade entre matrizes-coluna $[T(v)] = [T] \cdot [v]$.

Reiteramos que para determinar a matriz associada a uma transformação linear T, calculamos $T(1,0) = (a,b)$ e $T(0,1) = (c,d)$. Então $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Os exemplos que seguem levam em consideração o material do módulo anterior, "Geometria das Transformações Lineares".

Exemplo 2. *A homotetia de razão k, $T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T_k(x,y) = (kx,ky)$, é induzida pela matriz* $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

Exemplo 3. *Se $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação de ângulo θ, sabemos que $R_\theta(x,y) = (\cos\theta \cdot x - \operatorname{sen}\theta \cdot y, \operatorname{sen}\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)$. Logo,* $[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Exemplo 4. *Considere a reta r de equação $y = ax$. Então a reflexão em torno da reta r, $S_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, é dada por $S_r(x,y) = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}y, \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}y \right)$. Portanto, vale*

$[S_r] = \begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & -\frac{1-a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$. *Se θ é o ângulo orientado do eixo das abscissas para a reta r, então $a = \operatorname{tg}\theta$, de modo que a matriz de S_r também pode ser escrita como* $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$*, isto é, $[S_r] = [R_{2\theta}]^t$, em que A^t denota a transposta da matriz A.*

Encerraremos essa seção com dois resultados importantes. Primeiro uma relação que expressa o (cosseno do) ângulo entre dois vetores em termos de coordenadas. Por último, um critério de não-colinearidade. Com esse intuito, sejam $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ vetores não nulos. Se θ é o ângulo entre u e v, provaremos agora a relação

$$ac + bd = |u||v|\cos\theta. \tag{2}$$

Com efeito, note que $[ac + bd] = [a \quad b]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ (uma matriz 1×1 no 1º membro e o produto de uma matriz 1×2 por uma matriz 2×1 no 2º membro). Digamos que o ângulo orientado de u para v seja θ. Então $\frac{v}{|v|} = R_\theta(\frac{u}{|u|})$, ou seja, $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \frac{|v|}{|u|}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Segue-se que

$$\begin{aligned}
[ac + bd] &= \frac{|v|}{|u|}[a \quad b]\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \frac{|v|}{|u|}[a \quad b]\begin{bmatrix} a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta \\ a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \frac{|v|}{|u|}[(a^2 + b^2)\cos\theta] \\
&= [|u||v|\cos\theta],
\end{aligned}$$

pois $a^2 + b^2 = |u|^2$, o que estabelece a relação (2). O cálculo para o caso em que θ é o ângulo de v para u é completamente análogo.

Observação 5. *A igualdade* $ac + bd = |u||v|\cos\theta$ *nos diz que o valor* $ac + bd$ *independe do sistema de coordenadas considerado. A expressão* $ac + bd$ *chama-se* produto interno *dos vetores* $u = (a,b)$ *e* $v = (c,d)$.

Diremos que dois vetores u e v são *ortogonais*, e escreveremos $u \perp v$, quando o ângulo entre eles for reto. Por convenção, o vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor.

Da relação (2) segue-se que dois vetores são ortogonais se, e somente se, é nulo o produto interno desses vetores. Isso merece registro.

Proposição 6. *Dois vetores* $u = (a,b)$ *e* $v = (c,d)$ *são ortogonais se, e só se,* $ac + bd = 0$.

Lema 7. *Dois vetores* $u = (a,b)$ *e* $v = (c,d)$ *são não-colineares se, e só se,* $ad - bc \neq 0$. *De outro modo, os vetores* u *e* v *têm direções distintas se, e somente se, o determinante da matriz cujas colunas são (as coordenadas de)* u *e* v *é não nulo.*

Demonstração. Basta mostar que u e v são colineares se, e só se, $ad - bc = 0$. De fato, u e v são colineares se, e somente se, $v = (c,d)$ e $R_{90^\circ}(u) = (-b,a)$ são ortogonais. Pela proposição anterior, isso ocorre se, e só se, $ad - bc = c(-b) + da = 0$. Para finalizar, note que $ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. □

2 Mudança de Coordenadas

Uma observação importante: a matriz de uma transformação linear *depende* da escolha do sistema de coordenadas. Por exemplo, considere a reflexão S_r em torno da reta r. Se o sistema de coordenadas tem o eixo das abscissas coincidente com r, a matriz de S_r é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Mas se o eixo das ordenadas coincidisse com r, a matriz de S_r seria $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Todavia, é possível determinar a mudança da matriz de uma transformação linear T em função da mudança de coordenadas. Começaremos relacionando as coordenadas x,y e x',y' de um mesmo vetor u relativamente a dois sistemas de coordenadas OXY e $OX'Y'$, em que o segundo sistema é obtido submetendo-se o primeiro sistema a uma rotação de ângulo θ e centro O. Acompanhe na figura abaixo.

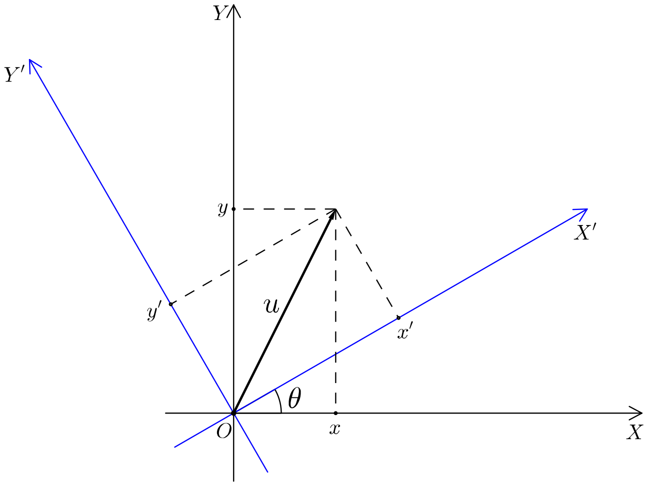

Figura 1: A rotação de ângulo θ leva OXY em $OX'Y'$.

No que segue, atribuiremos um apóstrofo $'$ às quantidades associadas ao sistema $OX'Y'$. Observando que, relativamente ao sistema $OX'Y'$, o vetor u ocupa a mesma posição que o vetor obtido de u pela rotação de ângulo $-\theta$ ocupa em relação ao sistema OXY, vem $[u]' = [R_{-\theta}(u)]$, ou seja,

$$[u]' = [R_{-\theta}] \cdot [u], \tag{3}$$

ou ainda
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{4}$$
Com a relação (3) em mente, temos
$$\begin{aligned} [T]'[v]' &= [T(v)]' \\ &= [R_{-\theta}] \cdot [T(v)] \\ &= [R_{-\theta}] \cdot [T] \cdot [v] \\ &= ([R_{-\theta}] \cdot [T] \cdot [R_{\theta}]) \cdot [v]', \end{aligned}$$
para cada $v \in V$. Pela parte da unicidade na Proposição (1), segue-se que
$$[T]' = [R_{-\theta}] \cdot [T] \cdot [R_{\theta}], \tag{5}$$
o que nos permite relacionar as matrizes $[T]$ e $[T]'$ da transformação linear T relativamente aos sistemas de coordenadas OXY e $OX'Y'$, respectivamente.

Vejamos uma aplicação do cálculo de mudança de coordenadas. Considere a curva de equação $xy = 1$, o gráfico da *função recíproco* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$.

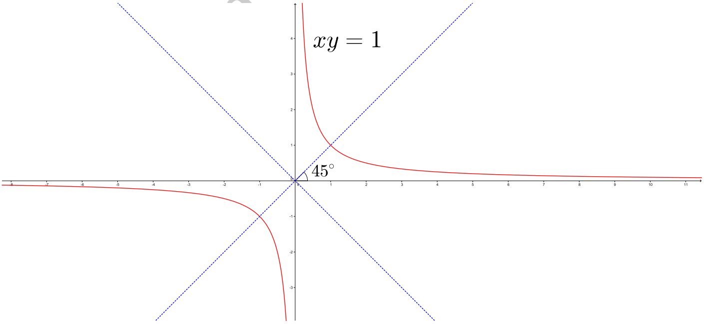

Figura 2: Em vermelho, o gráfico de $xy = 1$.

Se você já estudou o conteúdo de *cônicas* deve ter percebido a semelhança desse gráfico com uma hipérbole. Mas a equação de uma hipérbole, centrada na origem, costuma ser apresentada como $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, caso em que o sistema de coordenadas é tal que o eixo das abscissas coincide com o eixo focal da hipérbole. Vamos agora determinar um sistema de coordenadas no qual a equação $xy = 1$ se transforma numa equação daquele tipo, o que confirmará a nossa suspeita de que o gráfico da função recíproco é mesmo uma hipérbole. Ora, se realmente o gráfico de $xy = 1$ for uma hiperbole, os eixos coordenados serão as suas assíntotas, o que nos faz apostar na reta $x = y$ como o eixo focal da hipérbole (os eixos de uma hipérbole bissectam os ângulos formados pelas assíntotas). Portanto, uma rotação de $45°$ no sistema de coordenadas deve funcionar. De fato, nesse novo sistema, as coordenadas x',y' relacionam-se com as coordenadas x,y pela fórmula (4), sendo $\theta = 45°$. Portanto, $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, de maneira que a equação $xy = 1$ se torna $\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} = 1$, ou seja, $\frac{(x')^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{2}^2} = 1$, o que representa uma hipérbole, como desejado.

3 Transformações Ortogonais

Definição 8. *i) Uma transformação linear $T : V \to V$ é dita* ortogonal *quando transforma qualquer par de vetores unitários e ortogonais num par de vetores também unitários e ortogonais: $|u| = 1, |v| = 1, u \perp v \Rightarrow |T(u)| = 1, |T(v)| = 1, T(u) \perp T(v)$.*
ii) Diremos que uma matriz A é ortogonal *quando a aplicação linear induzida T_A for ortogonal.*

Exemplo 9. *É fácil verificar que rotacões e reflexões são transformações ortogonais. O próximo teorema estabelece a recíproca desse fato.*

Teorema 10. *Se A é uma matriz ortogonal, existe um ângulo θ tal que $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$. Em particular,* $\det A = \pm 1$. *Portanto, toda matriz ortogonal A induz uma rotação ou uma reflexão, conforme se tenha* $\det A = 1$ *ou* $\det A = -1$.

Demonstração. Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ e T a transformação ortogonal induzida por A. Como os vetores $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$ são unitários e ortogonais, as suas imagens $T(\mathbf{i}) = (a,b)$,$T(\mathbf{j}) = (c,d)$ também são unitários e ortogonais. Da igualdade $a^2 + b^2 = 1$, vem $|a| \leq 1$. Agora, a imagem da função cos é o intervalo $[-1,1]$, de modo que existe um ângulo α satisfazendo $a = \cos\alpha$. Pela relação fundamental, $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - a^2 = b^2$, ou seja, $\operatorname{sen}\alpha = \pm b$. Se $\theta = \pm\alpha$, vemos que $(a,b) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Sendo os vetores unitários (c,d) e $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ ambos ortogonais ao vetor (a,b), só pode ser $(c,d) = \pm(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, o que encerra a demonstração. □

4 Transformações Simétricas

Definição 11. *Uma matriz que coincide com a sua transposta é dita* simétrica*.*

Assim, matrizes simétricas tem a forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$.

Definição 12. *Diremos que uma transformação linear T é simétrica se a sua matriz $[T]$ for simétrica.*

Para que a definição acima faça sentido, precisamos verificar o seguinte: *se a matriz de uma transformação linear for simétrica relativamente a um sistema de coordenadas, então as matrizes dessa transformação relativas aos demais sistemas de coordenadas serão todas simétricas também.*

Com efeito, pela relação (5), duas matrizes $[T]$ e $[T]'$ de T satisfazem $[T]' = [R_{-\theta}] \cdot [T] \cdot [R_\theta]$, para algum θ. Se $[T]$ é simétrica, temos

$$\begin{aligned} ([T]')^t &= ([R_{-\theta}] \cdot [T] \cdot [R_\theta])^t \\ &= [R_\theta]^t \cdot [T]^t \cdot [R_{-\theta}]^t \\ &= [R_{-\theta}] \cdot [T] \cdot [R_\theta] \\ &= [T]', \end{aligned} \tag{6}$$

ou seja, $[T]'$ também é simétrica.

O nosso próximo teorema mostra que, escolhendo convenientemente o sistema de coordenadas, toda transformação linear simétrica representa-se por uma matriz diagonal $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

Teorema 13. *Se $T : V \to V$ é uma aplicação linear simétrica, existe um sistema de coordenadas relativamente ao qual a matriz de T é diagonal.*

Demonstração. Fixado um sistema de coordenadas OXY qualquer, seja $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ a matriz de T. Podemos supor $b \neq 0$. Queremos um ângulo θ, com $0^\circ < \theta < 90^\circ$, de modo que o sistema de coordenadas $OX'Y'$, obtido através da rotacão do sistema OXY por θ, nos permita representar T por uma matriz diagonal $[T]'$. Ora, levando em conta a igualdade (5), vemos que os elementos da diagonal secundária da matriz $[T]'$ são iguais a $b(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + (d-a)\cos\theta \operatorname{sen}\theta$. Portanto, devemos tomar θ de tal modo que $b\cos 2\theta = \frac{a-d}{2}\operatorname{sen} 2\theta$, ou seja,

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-d}{2b}. \tag{7}$$

Com essa escolha de θ, $[T]'$ torna-se uma matriz diagonal:

$$[T]' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

com

$$\alpha = a\cos^2\theta + b\operatorname{sen} 2\theta + d\operatorname{sen}^2\theta \tag{8}$$

e

$$\beta = a\operatorname{sen}^2\theta - b\operatorname{sen} 2\theta + d\cos^2\theta. \tag{9}$$

$\square$

Definição 14. *Duas matrizes (2×2) A e A' são ditas* ortogonalmente equivalentes*, ou simplesmente* equivalentes*, quando A e A' são matrizes de uma mesma transformação linear T.*

Por (5), as matrizes A e A' são equivalentes se, e só se,

$$A' = [R_{-\theta}] \cdot A \cdot [R_\theta], \tag{10}$$

para algum θ. Interpretando o teorema anterior em termos de matrizes, temos o

Corolário 15. *Toda matriz simétrica é equivalente a uma matriz diagonal.*

No próximo exemplo pede-se que uma potência A^n de uma matriz simétrica seja calculada. Há uma abordagem geral para esse tipo de problema. Primeiro *diagonalizamos* a matriz A, ou seja, determinamos uma matriz diagonal $A' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ equivalente a A ((10)). Para isso, podemos utilizar as relações (7), (8) e (9). Depois, levamos em conta as seguintes igualdades

$$A^n = [R_\theta] \cdot (A')^n \cdot [R_{-\theta}] \tag{11}$$

e

$$(A')^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix}, \tag{12}$$

qualquer que seja o número natural n. O leitor poderá verificar essas relações utilizando indução matemática. Finalmente, calculando $[R_\theta] \cdot (A')^n \cdot [R_{-\theta}]$, vem

$$A^n = \begin{bmatrix} \alpha^n \cos^2\theta + \beta^n \operatorname{sen}^2\theta & \frac{\alpha^n - \beta^n}{2} \operatorname{sen} 2\theta \\ \frac{\alpha^n - \beta^n}{2} \operatorname{sen} 2\theta & \alpha^n \operatorname{sen}^2\theta + \beta^n \cos^2\theta \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Exemplo 16. *Calcule* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$.

Solução. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vamos determinar um ângulo θ de tal modo que $A' = [R_{-\theta}] \cdot A \cdot [R_\theta]$ seja uma matriz diagonal, digamos $A' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

Pela igualdade (7), θ deve ser tal que $\operatorname{cotg} 2\theta = -\frac{1}{2}$. Daí $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos^2\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ e $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$. Portanto, realizando os cálculos indicados em (8) e (9), obteremos $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ou seja, $A' = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$. Desse modo, por (13), vem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} & \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} & \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

$\square$

Considere a sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$, em que $f_0 = 0, f_1 = 1$ e $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para todo número natural n. Assim $(f_n) = (0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots)$.

Podemos utilizar o exemplo anterior para obter uma fórmula para o n-ésimo termo f_n da sequência de Fibonacci.

Exemplo 17. *Mostre que* $f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}$, *para todo* $n \geq 0$.

Solução. Podemos expressar a recorrência $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ em termos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para cada $n \geq 0$. Da igualdade (14), segue a relação desejada. $\square$

Dicas para o Professor

Vimos nessa aula que, fixado um sistema de coordenadas, uma transformação linear equivale a uma matriz. Pergunta-se então qual seria a "melhor" matriz para uma dada transformação linear. Para o caso de transformações simétricas, a resposta dessa pergunta encontra-se no Teorema (13). Em relação a esse resultado, há um outro modo de obter as entradas α e β da matriz diagonal de uma aplicação linear simétrica. É o método clássico que encontramos em qualquer referência de Álgebra Linear e o Professor pode julgar a dicussão útil.

Se a matriz de uma transformação linear T relativamente a um sistema de coordenadas $OX'Y'$ é diagonal, $[T]' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, então $T(\mathbf{i}') = \alpha \cdot \mathbf{i}'$ e $T(\mathbf{j}') = \beta \cdot \mathbf{j}'$, sendo $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ os vetores unitários dos eixos. Isso nos diz que os números reais α e β estão entre os números λ tais que $T(v) = \lambda \cdot v$ se verifica para algum vetor $v \neq 0$. Se I é a matriz identidade, essa última condição equivale ao sistema homogêneo $([T] - \lambda \cdot I) \cdot [v] = 0$ admitir uma solução não-nula. Por sua vez, esse sistema admite uma solução não-nula se, e só se, o determinante da matriz $[T] - \lambda \cdot I$ é nulo. Se $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, o determinante da matriz $[T] - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{bmatrix}$ é $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$, ou seja, α e β são raízes da equação quadrática

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0. \tag{15}$$

Na verdade, α e β são *as* raízes da equação (15). Isso é claro se $\alpha \neq \beta$, pois uma equação quadrática tem no máximo duas raízes. Se $\alpha = \beta$, a equação (5) com $[T]' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ nos dá $a = d = \alpha$ e $b = 0$, de modo que α é a raiz dupla de (15). As raízes da equação (15) são chamadas de *autovalores* da transformação T ou da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$.

Para efeito de ilustração, os autovalores α e β da matriz do Exemplo (16) são as raízes da equação $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, ou seja, o *número de ouro* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e o oposto do seu recíproco $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, como obtidos anteriormente.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.