Material Teórico - Desigualdades Elementares Parte 1

Desigualdades Elementares

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de julho de 2019

1 Desigualdades elementares

Ao longo deste material, apresentaremos algumas desigualdades elementares. Para mostrar a validade das mesmas, nosso ponto de partida é o fato de que o quadrado de qualquer número real é maior do que ou igual a zero, sendo igual a zero se, e somente se, o número em questão também for igual a zero. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. *Mostre que se x é um número real positivo, então*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \tag{1}$$

Além disso, vale a igualdade $x + \frac{1}{x} = 2$ se, e somente se, $x = 1$.

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 &\Longleftrightarrow x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \cdot x \geq 0 \cdot x \\ &\Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A última desigualdade acima é claramente verdadeira, uma vez que o quadrado de qualquer número real é maior do que ou igual a zero. Portanto, obtemos $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Agora, é obvio que se $x = 1$, então $x + \frac{1}{x} = 2$. Por outro lado, se $x + \frac{1}{x} = 2$, então, fazendo manipulações algébricas parecidas com as que fizemos acima, chegamos à equação $(x-1)^2 = 0$, o que acarreta $x = 1$. □

Exemplo 2. *Mostre que se a e b são números reais positivos, então*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \tag{2}$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $a = b$.

Prova. Como $a > 0$ e $b > 0$, temos que $ab > 0$ e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 &\Longleftrightarrow \frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}\right) \cdot ab \geq 0 \cdot ab \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab}\right) \cdot ab \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $(a-b)^2 \geq 0$ é uma desigualdade verdadeira, concluímos que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ também é verdadeira.

Para a igualdade, é imediato verificar (novamente com o auxílio dos cálculos acima) que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \Longleftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b.$$

Portanto, a igualdade em (2) ocorre se, e somente se, $a = b$. □

Veja que a prova da validade da desigualdade (2) é análoga à prova da validade da desigualdade (1). De fato, é interessante observar que podemos obter a desigualdade (2) como consequência de (1). Para tanto, fazendo $x = \frac{a}{b}$ em (1), temos que $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, logo,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

A condição para a igualdade também segue daquela para (1), uma vez que, com $x = \frac{a}{b}$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 &\Longrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Longrightarrow x = 1 \\ &\Longrightarrow \frac{a}{b} = 1 \Longrightarrow a = b. \end{aligned}$$

Exemplo 3. *Mostre que se a e b são números reais positivos, então*

$$(a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4. \tag{3}$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $a = b$.

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &= \frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} \\ &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \\ &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Agora, de (2) e dos cálculos acima, segue que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 &\Longleftrightarrow 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 + 2 \\ &\Longleftrightarrow (a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4. \end{aligned}$$

Por fim, note que vale a igualdade em (3) se, e somente se,

$$2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4,$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2.$$

Por sua vez, essa última igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$. □

O exemplo anterior pode ser generalizado pelo seguinte resultado:

Proposição 4. *Sejam a_1, a_2, …, a_n números reais positivos. Então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right) \geq n^2, \tag{4}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Prova. Iniciamos desenvolvendo o produto

$$P=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right),$$

temos

$$\begin{aligned}P&=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_i}{a_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i}+\sum_{n\ge i>j\ge 1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)\\&=n+\sum_{n\ge i>j\ge 1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right).\end{aligned}$$

Agora, veja que o número de parcelas do tipo $\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}$, com $n\ge i>j\ge 1$, corresponde ao número de modos de escolhermos um subconjunto de dois elementos do conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ (pois, uma vez escolhido um tal subconjunto, seu menor elemento será j e seu maior elemento será i). Portanto, há $\binom{n}{2}$ parcelas do tipo descrito acima.

Conforme vimos no exemplo 2, cada uma dessas parcelas é maior do que ou igual a 2. Logo,

$$\begin{aligned}P&=n+\sum_{n\ge i>j\ge 1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)\\&\ge n+\binom{n}{2}\cdot 2\\&=n+\frac{n(n-1)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\\&=n+(n^2-n)\\&=n^2.\end{aligned}$$

Agora, se vale a igualdade em (4), então

$$n+\sum_{n\ge i>j\ge 1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)=n+\binom{n}{2}\cdot 2,$$

o que implica

$$\sum_{n\ge i>j\ge 1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}-2\right)=0.$$

No primeiro membro da igualdade acima, cada parcela é não negativa. Portanto, a única maneira da soma ser igual a zero é se cada uma das parcelas for igual a 0, isto é, se

$$\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}-2=0.$$

Então, a condição para a igualdade no exemplo 2 garante que $a_i=a_j$, para todos $n\ge i>j\ge 1$, e isso é o mesmo que $a_1=a_2=\ldots=a_n$. □

Exemplo 5. *Prove que se a e b são números reais não nulos, então*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab}. \tag{5}$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $a=b$.

Prova. Veja que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab}&\Longleftrightarrow\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot a^2b^2\ge\frac{2}{ab}\cdot a^2b^2\\&\Longleftrightarrow\frac{\cancel{a^2}b^2}{\cancel{a^2}}+\frac{a^2\cancel{b^2}}{\cancel{b^2}}\ge\frac{2a^2b^2}{ab}\\&\Longleftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab\\&\Longleftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\\&\Longleftrightarrow (a-b)^2\ge 0.\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade (5) é verdadeira para quaisquer números reais a e b não nulos e vale a igualdade se, e somente se, $a=b$. □

Exemplo 6. *Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que*

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc. \tag{6}$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $a=b=c$.

Solução. Temos que

$$(a-b)^2\ge 0\Longleftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab,$$

$$(a-c)^2\ge 0\Longleftrightarrow a^2+c^2\ge 2ac$$

e

$$(b-c)^2\ge 0\Longleftrightarrow b^2+c^2\ge 2bc.$$

Somando membro a membro as desigualdades acima, obtemos

$$(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)\ge 2ab+2ac+2bc$$

ou, o que é o mesmo,

$$2(a^2+b^2+c^2)\ge 2(ab+ac+bc).$$

Portanto,

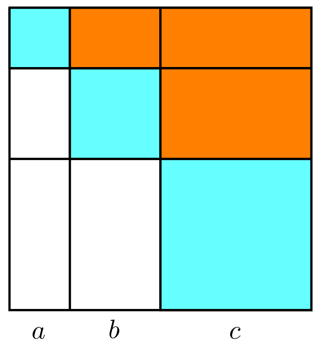
$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc.$$

Agora, se vale a igualdade em (6), então podemos essencialmente repetir os cálculos acima, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc\\\Longleftrightarrow\ &2\left(a^2+b^2+c^2\right)=2(ab+ac+bc)\\\Longleftrightarrow\ &2a^2+2b^2+c^2=2ab+2ac+2bc\\\Longleftrightarrow\ &(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)=0\\\Longleftrightarrow\ &(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.\end{aligned}$$

Como na demonstração da Proposição 4, a única possibilidade para uma soma de parcelas não negativas dar resultado 0 é se todas as parcelas forem iguais a 0. Assim, a igualdade acontece se, e somente se, $a=b=c$. □

Podemos dar uma interpretação geométrica interessante para o exemplo 6. Para tanto, considere o quadrado de lado $a + b + c$ desenhado abaixo.



A soma das áreas dos quadrados azuis é $a^2 + b^2 + c^2$, ao passo que a soma das áreas dos retângulos laranjas é $ab + ac + bc$. Assim, a medida da área pintada de azul é maior do que ou igual à medida da área pintada de laranja.

Voltando ao desenvolvimento da teoria, expandindo o quadrado no lado esquerdo da desigualdade $(a - b)^2 \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 \geq 0 &\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0\\ &\iff a^2 + b^2 \geq 2ab\\ &\iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab, \tag{7}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a = b$.

Agora, se x e y são números reais positivos, então, fazendo $a = \sqrt{x}$ e $b = \sqrt{y}$ em (7), obtemos

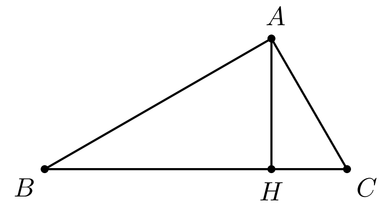
$$\frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2}{2} \geq \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}. \tag{8}$$

Na última desigualdade acima, $\frac{x+y}{2}$ é a **média aritmética** e $\sqrt{xy}$ é a **média geométrica** dos reais positivos x e y. Assim, ela é um caso particular da **desigualdade entre as médias aritmética e geométrica** (também conhecida simplesmente como a **desigualdade entre as médias**).

O nome *média geométrica* dado a $\sqrt{xy}$ vem do seguinte fato (acompanhe na próxima figura): se ABC é um triângulo retângulo em A, com altura AH relativa à hipotenusa BC, tal que $\overline{BH} = x$ e $\overline{CH} = y$, então $\overline{AH} = \sqrt{xy}$. Verifique esse fato e veja como, a partir dele, podemos dar uma demonstração *geométrica* de (8).



Podemos mostrar facilmente que 3 e (6) são equivalentes a (8), no sentido de que, a partir de 3 ou (6), podemos obter (8), e vice-versa. Sugerimos ao leitor demonstrar tais equivalências como exercício.

Nas próximas partes dessa aula, discutiremos o caso geral da desigualdade entre as médias e faremos algumas aplicações.

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir todo o conteúdo presente neste material. É importante que o professor mostre cada uma das desigualdades apresentadas com todos os detalhes, sempre ressaltando o argumento utilizado: o quadrado de um número real é maior do que ou igual a zero, sendo igual a zero se, e somente se, o número em questão for igual a zero. Além disso, reobtenha as desigualdades apresentadas utilizando a desigualdade entre as médias. Este tipo de exercício é importante para que os alunos se acostumem a utilizar essa desigualdade como ferramenta.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. Paulo Cezar Carvalho e Augusto César Morgado. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro, SBM, 2015.