# Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

## Teorema de Tales - Parte III

## Nono Ano do Ensino Fundamental

Prof. Marcelo Mendes
Prof. Antonio Caminha

15 de Abril de 2026



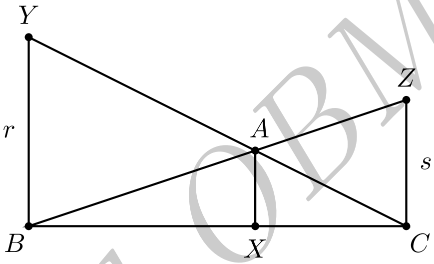
PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Este material conclui a apresentação das aplicações dos teoremas de Tales e da bissetriz, discutindo mais alguns exemplos interessantes.

**Exemplo 1.** *Sobre o lado $BC$ de um triângulo $ABC$ marcamos um ponto $X$. Em seguida, traçamos por $B$ e $C$ as retas $r$ e $s$, respectivamente, ambas paralelas a $\overleftrightarrow{AX}$. Se $\overleftrightarrow{AC} \cap r = \{Y\}$ e $\overleftrightarrow{AB} \cap s = \{Z\}$, prove que*

$$\frac{1}{\overline{BY}} + \frac{1}{\overline{CZ}} = \frac{1}{\overline{AX}}.$$

**Solução.** A figura a seguir representa a situação descrita.




Como $r \parallel \overleftrightarrow{AX}$, temos $BYC \sim XAC$; como $s \parallel \overleftrightarrow{AX}$, temos $CZB \sim XAB$. Escrevendo as semelhanças, segue que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AX}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}.$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} + \frac{\overline{AX}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CX} + \overline{BX}}{\overline{BC}} = 1.$$

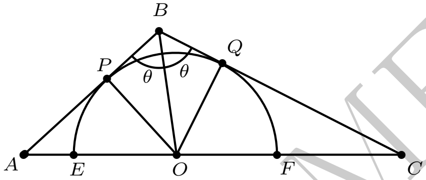
Por fim, multiplicando ambos os membros da igualdade

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} + \frac{\overline{AX}}{\overline{CZ}} = 1$$

por $\dfrac{1}{\overline{AX}}$, obtemos a igualdade do enunciado. □

**Exemplo 2.** *No triângulo $ABC$, em que $AB = 12$, $BC = 18$ e $AC = 25$, um semicírculo é desenhado com diâmetro sobre o lado $AC$, de tal forma que ele seja tangente aos lados $AB$ e $BC$. Sendo $O$ o centro do semicírculo, encontre a medida de $AO$.*

**Solução.** A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado. Nela, $P$ e $Q$ são os pontos de tangência do semicírculo com os lados $AB$ e $BC$, respectivamente.




Uma vez que as tangentes traçadas a um círculo a partir de um mesmo ponto têm comprimentos iguais, temos $BP = BQ$. Além disso, $BO$ é lado comum aos triângulos $BPO$ e $BQO$, que ainda têm lados $PO$ e $QO$ com comprimentos iguais, pois são ambos raios do semicírculo. Isso garante a congruência entre os triângulos $BPO$ e $BQO$, pelo caso de congruência LLL. Portanto, $P\widehat{B}O = Q\widehat{B}O$, ou seja, $BO$ é bissetriz interna de $A\widehat{B}C$.

Agora, sendo $x$ a medida de $AO$, temos que $25 - x$ é a medida de $OC$. Portanto, pelo teorema da bissetriz interna, $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{AC}}$. Mas

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{AC}} &\Leftrightarrow \frac{x}{12} = \frac{25-x}{18}\\ &\Leftrightarrow 18x = 300 - 12x\\ &\Leftrightarrow 30x = 300 \Leftrightarrow x = 10.\end{aligned}$$

□

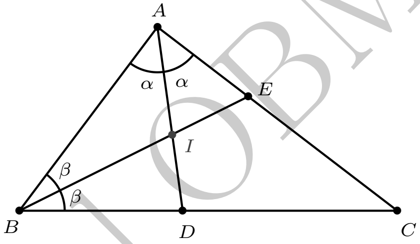
Para o próximo exemplo, recorde que o **incentro** de um triângulo é o ponto de encontro das três bissetrizes internas do mesmo, e que tal ponto equidista dos lados do triângulo; em particular, ele é o centro do **círculo inscrito** no triângulo, ou seja, o círculo contido no triângulo e tangente a seus lados.

**Exemplo 3.** *Seja $ABC$ um triângulo com lados $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{BC} = 5$. Seja, também, $D$ o ponto sobre o lado $BC$ tal que $AD$ é a bissetriz interna do ângulo $\widehat{A}$.*

(*a*) *Calcule a medida do segmento $BD$;*

(*b*) *Se $I$ for o incentro de $ABC$, calcule a razão em que $I$ divide a bissetriz interna $AI$.*

**Solução.** A figura a seguir servirá à análise de ambos os itens pedidos.




(a) Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo $ABC$, temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{4}.$$

Aplicando as propriedades de proporções à igualdade acima, podemos repetir os numeradores e, em seguida, somá-los aos denominadores. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BD} + \overline{DC}} = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{15}{7}.$$

(b) Agora, a idéia é perceber que o segmento $BI$ também é bissetriz interna do triângulo $ABD$, o que nos permite aplicar novamente o teorema da bissetriz interna. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{\frac{15}{7}} = \frac{7}{5}.$$

$\square$

**Exemplo 4.** *A bissetriz interna $AD$ de um triângulo $ABC$ divide o lado oposto em dois segmentos $BD$ e $CD$, de medidas respectivamente iguais a 24cm e 30cm. Sabendo que $AB$ e $AC$ têm comprimentos respectivamente iguais a $2x+6$ e $3x$, calcule o valor de $x$ e as medidas de $AB$ e $AC$.*

**Solução.** Aplicando uma vez mais o teorema da bissetriz interna (faça uma figura para acompanhar), temos

$$\frac{2x+6}{3x} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}.$$

Multiplicando em $\times$, segue que $5(2x+6) = 3x \cdot 4$, logo, $12x = 10x + 30$. Então, $x = 15$ e, daí,

$$AB = 2x + 6 = 2 \cdot 15 + 6 = 36$$

e, analogamente, $AC = 45$. $\square$

**Exemplo 5.** *Calcule a medida do lado $AB$ do triângulo $ABC$ sabendo que:*

(*i*) *a bissetriz interna $AD$ de $\widehat{A}$ determina, sobre o lado $BC$, o segmento $BD$ de medida 10cm;*

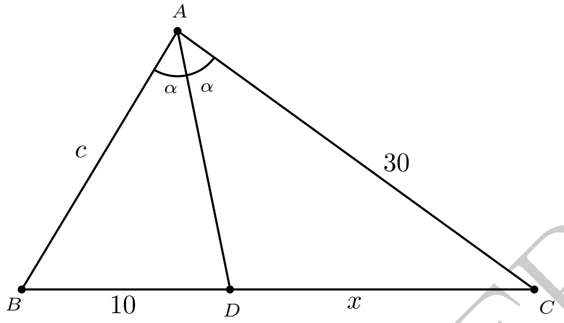
(*ii*) *o lado $AC$ mede 30cm;*

(*iii*) *o perímetro de $ABC$ é 75cm.*

**Solução.** A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.

Aplicando o teorema da bissetriz interna, obtemos $\frac{c}{10} = \frac{30}{x}$ ou, o que é o mesmo, $cx = 300$.

Por outro lado, a medida do perímetro de $ABC$ fornece a igualdade $c + 10 + x + 30 = 75$, de sorte que $c + x = 35$.




Assim, obtiveemos o sistema de equações

$$\begin{cases} c + x = 35 \\ cx = 300 \end{cases}.$$

A primeira equação dá $c = 35 - x$, relação que substituída na segunda equação resulta na equação de segundo grau

$$x^2 - 35x + 300 = 0.$$

Como o discriminante é $\Delta = (-35)^2 - 4 \cdot 300 = 25$, obtemos

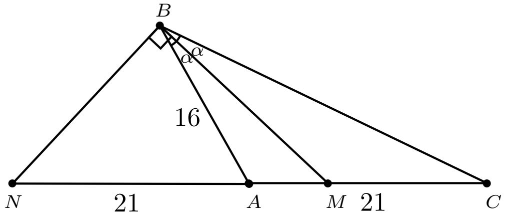
$$x = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2} = 20 \text{ ou } 15.$$

A partir daí, $c = 35 - x = 15$ ou $20$.

Por fim, observe que ambos os pares de medidas obtidos para $x$ e $c$ verificam a desigualdade triangular, de modo que, realmente, há duas soluções possíveis. $\square$

**Exemplo 6.** *Em um triângulo $ABC$, as bissetrizes interna e externa traçadas a partir do vértice $B$ encontram o lado oposto (ou seu prolongamento) nos pontos $M$ e $N$, respectivamente. Se $\overline{AC} = 21$, $\overline{AB} = 16$ e $\overline{AN} = 21$, calcule os comprimentos dos segmentos $BC$ e $AM$.*

**Solução.** Primeiramente, observe que as igualdades $\overline{AN} = 21$ e $\overline{AC} = 21$ garantem que $A$ é o ponto médio do segmento $CN$ (veja a próxima figura).




Agora, pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}.$$

Substituindo os valores dados, temos

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{21}{42} = \frac{16}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 32.$$

Por outro lado, pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Então, aplicando as propriedades de proporções, segue que

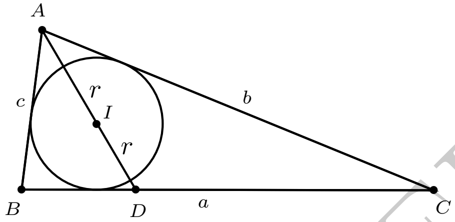
$$\begin{aligned} \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AM} + \overline{MC}} = \frac{1}{1+2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{21} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \overline{AM} = 7. \end{aligned}$$

□

O próximo (e último) exemplo é um tanto mais elaborado.

**Exemplo 7.** *Mostre que não existe triângulo no qual o círculo inscrito divida a bissetriz interna de um dos ângulos internos em três segmentos de comprimentos iguais.*

**Prova.** Considere a figura a seguir como representativa da situação do problema. Argumentando por contradição, suponha que a bissetriz interna $AD$ fique dividida, pelo círculo inscrito, em três segmentos de comprimentos iguais.




Sejam $I$ o incentro de $ABC$ e $r$ o raio do círculo inscrito. Como uma das três partes em que $AD$ fica dividido é o diâmetro do círculo inscrito, que tem comprimento $2r$, concluímos que $\overline{AD} = 3 \cdot 2r = 6r$. Assim, $\overline{AI} = 2r + r = 3r$, logo, $\overline{ID} = 3r$.

Agora, aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo $ABD$ (com a bissetriz $BI$), vimos no Exemplo 3 que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} = \frac{3r}{3r} = 1.$$

Se juntarmos esse resultado com o teorema da bissetriz interna aplicado ao triângulo $ABC$ (com bissetriz $AD$) e utilizarmos propriedades de proporções, obteremos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{BD} + \overline{DC}} = \frac{b+c}{a}.$$

Então, as duas relações acima garantem que

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = 1,$$

de maneira que $b+c = a$. Como isso contradiz a desigualdade triangular, chegamos a uma contradição.

Assim, não é possível que o círculo inscrito divida a bissetriz interna de um dos ângulos internos em três segmentos de comprimentos iguais. $\square$

## Dicas para o Professor

O conteúdo dessa última parte pode ser visto em um ou dois encontros de 50 minutos cada, a depender da maturidade da turma. Ao longo da discussão dos exemplos, você deve sempre enfatizar o uso de uma das versões do teorema da bissetriz como ferramenta principal, assim como pode utilizar exemplos mais elaborados (veja as referências).

Os teoremas das bissetrizes interna e externa têm aplicações interessantes à Geometria, sendo um exemplo notável aquele dado pelo *círculo de Apolônio*. Para o leitor interessado, sugerimos a referência [1].

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2024.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.