

Material Teórico - Módulo Equações do Segundo Grau

Relações entre Coeficientes e Raízes - Parte I

Nono Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Setembro de 2025



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Dando continuidade ao estudo de equações do segundo grau, discutiremos duas relações importantes entre suas raízes (quando estas forem reais) e seus coeficientes. Ainda supondo que existam raízes reais, veremos outras formas comuns de escrever a equação, bem como alguns problemas nos quais o objetivo maior não é simplesmente resolver a equação, mas fazer uso das relações mencionadas acima.

1 Relações entre coeficientes e raízes

Além da fórmula de Bhaskara, as duas relações mais importantes e famosas sobre equações de segundo grau são as *fórmulas para a soma e para o produto de suas raízes em função de seus coeficientes*. Deduziremos tais fórmulas nesta seção. Para tanto, comecemos recordando alguns fatos colecionados no material anterior.

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$. Lembre-se de que $\Delta = b^2 - 4ac$ é seu discriminante e que, quando $\Delta < 0$, ela não possui raízes reais. Assim, daqui em diante assumiremos que $\Delta \geq 0$, e denotaremos por x_1 e x_2 as raízes (reais) da equação, obtidas pela fórmula de Bhaskara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1)$$

No caso em que $\Delta > 0$, os números x_1 e x_2 são raízes distintas da equação. No caso em que $\Delta = 0$, os valores de x_1 e x_2 são iguais. Nesse caso, conforme já mencionamos no material da aula anterior, *convencionamos* dizer que esse valor comum é uma *raiz dupla*, ou uma *raiz de multiplicidade dois* ou, ainda, que *a equação tem duas raízes iguais*. Com isso em mente, ao usarmos a expressão “soma das raízes” nos referiremos sempre ao valor da soma $x_1 + x_2$, mesmo no caso em que $x_1 = x_2$. De outra forma, a soma é feita *considerando a multiplicidade das raízes*, e uma raiz dupla contribui para a soma duas vezes. Analogamente, o “produto das raízes” sempre se referirá ao número $x_1 x_2$.

De posse das convenções acima, para obter a soma das raízes basta somar membro a membro as igualdades em (1):

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{(-b + \cancel{\sqrt{\Delta}}) + (-b - \cancel{\sqrt{\Delta}})}{2a} \\
 &= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, para obter o produto das raízes, basta multiplicar membro a membro as igualdades em (1) e usar o produto notável da soma pela diferença de dois números para facilitar os cálculos:

$$\begin{aligned}
 x_1 x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 &= \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\
 &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\
 &= \frac{\cancel{b^2} - (\cancel{b^2} - 4ac)}{4a^2} \\
 &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.
 \end{aligned}$$

A seguir, resumimos os cálculos acima:

Se $a \neq 0$ e a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tiver raízes reais, possivelmente iguais, então sua soma vale $-b/a$ e seu produto vale c/a .

Essas relações são conhecidas como as **fórmulas de Viète**, em homenagem ao matemático francês François Viète (1540-1603), seu descobridor. Nelas, fique atento ao sinal negativo na expressão para a soma das raízes e positivo na expressão para o produto das mesmas!

Observação 1. Quando você estudar números complexos, verá (no módulo *Equações Algébricas-Propriedades das Raízes*, do Terceiro Ano do Ensino Médio) que as fórmulas de Viète continuam válidas quando considerarmos as raízes *complexas* de uma equação de segundo grau, desde que levemos em conta suas multiplicidades.

Exemplo 2. *Encontre a soma e o produto das raízes de cada uma das seguintes equações de segundo grau:*

(a) $3x^2 + 11x + 7 = 0$.

(b) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

(c) $x^2 - 12x = 0$.

(d) $16 - 4x - x^2 = 0$.

Solução.

(a) Aqui, $a = 3$, $b = 11$ e $c = 7$, de forma que obtemos diretamente que a soma das raízes é $-b/a = -11/3$ e o produto é $c/a = 7/3$. Veja que isso é bem mais rápido do que se tivéssemos primeiro que calcular cada uma das raízes para, depois, efetuar suas soma e produto.

(b) Como $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$, a soma das raízes é $-(-6)/1 = 6$ e o produto é $9/1 = 9$. Este item merece que discutamos um pouco mais o resultado obtido. Veja que, aqui, temos $\Delta = 0$ e, usando a fórmula de Bhaskara, vemos que 3 é uma raiz dupla. Por isso, a soma das raízes (com multiplicidade) é igual a $3 + 3 = 6$, enquanto o produto é igual a $3 \cdot 3 = 9$.

(c) Note que $a = 1$, $b = -12$ e $c = 0$. Nesse caso, a soma das raízes é $-(-12)/1 = 12$ e produto é $0/1 = 0$. De fato, as raízes são 0 e 12.

(d) Cuidado, pois, a equação está escrita em uma ordem não usual: veja que $a = -1$, $b = -4$ e $c = 16$. Sendo assim, a soma das raízes é $-(-4)/(-1) = -4$ e o produto é $16/(-1) = -16$.

□

Voltando à equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, veja que, como $a \neq 0$, temos a seguinte equivalência:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Agora, denotando por S e P , respectivamente, o valor da soma e do produto das raízes, temos $S = -b/a$ e $P = c/a$, de sorte que a última equação acima pode ser escrita como:

$$x^2 - Sx + P = 0. \quad (2)$$

Essa maneira de “*ver*” a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é bastante útil se quisermos tentar encontrar suas raízes “*por inspeção*”, isto é, sem utilizar a fórmula de Bhaskara.

Por exemplo, para encontrar as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, basta (de acordo com (2)) procurarmos dois números reais cuja soma seja igual a 5 e cujo produto seja igual a 6. Após um momento de reflexão (e algumas tentativas e erros), percebemos que os números procurados são 2 e 3, de forma que esses dois números são as raízes da equação. É claro que esse método não é muito útil se os coeficientes forem muito grandes ou se as raízes não forem números inteiros. Por outro lado, lembre-se de que, mesmo quando as raízes forem números inteiros, estes podem ser positivos ou negativos.

Exemplo 3. *Sabendo que as raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$ são números inteiros, encontre-as sem usar a fórmula de Bhaskara.*

Solução. Veja que a soma das raízes é igual a -2 e seu produto é igual a -15 . Como o produto é negativo e as raízes são reais, uma delas deve ser positiva e a outra negativa. Ademais, ambas pertencem ao conjunto dos divisores de 15: $\{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$. Uma análise de casos mostra que, para a soma ser -2 e o produto ser -15 , as raízes precisam ser -5 e 3 . □

A equação (2) também pode ser utilizada para solucionar o seguinte *problema inverso*: dados dois números reais, encontrar uma equação de segundo grau que tenha esses dois números por raízes¹.

Exemplo 4. *Escreva uma equação de segundo grau que tenha como raízes os números -20 e 4 .*

Solução. A soma das raízes deve ser $S = (-20) + 4 = -16$ e o produto deve ser $P = (-20) \cdot 4 = -80$. Assim, uma equação que resolve o problema é $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja, $x^2 - (-16)x + (-80) = 0$. Simplificando, obtemos:

$$x^2 + 16x - 80 = 0.$$

□

Observação 5. A solução do problema anterior não é única. De fato, há infinitas outras equações de segundo grau que também têm os números -20 e 4 como raízes. Por exemplo, $2x^2 + 32x - 160 = 0$ é uma delas. Em geral, basta multiplicar os dois lados de $x^2 + 16x - 80 = 0$ por qualquer número real diferente de zero. Além disso, poderíamos reordenar os termos, passá-los de um lado para o outro (claro, invertendo seus sinais!), fatorar um dos lados da equação, etc. Por outro lado, a solução que obtivemos é a única no formato $x^2 - Sx + P = 0$.

A comparação entre as duas soluções que apresentaremos ao próximo exemplo deixa muito clara a vantagem da utilização das fórmulas de Viète.

Exemplo 6. *Sendo u e v as raízes da equação*

$$x^2 - 5x + 3 = 0,$$

escreva uma equação de segundo grau cujas raízes sejam $u+1$ e $v+1$.

¹Observe que pelo recurso a esse problema inverso é que seu professor consegue criar rapidamente uma equação de segundo grau para a qual ele já conhece as soluções.

Solução 1. Note que a equação do enunciado já está no formado $x^2 - Sx + P = 0$ (em particular, atente para o fato de que o coeficiente de x^2 é igual a 1). Sendo assim, a soma das raízes é $u + v = 5$ e o produto delas é $uv = 3$.

Para construir uma equação com raízes $u + 1$ e $v + 1$, basta ver que:

$$(u + 1) + (v + 1) = (u + v) + 2 = 7$$

e

$$(u + 1)(v + 1) = uv + (u + v) + 1 = 3 + 5 + 1 = 9.$$

Assim, uma equação que satisfaz o enunciado é:

$$x^2 - 7x + 9 = 0.$$

□

Solução 2. O discriminante da equação $x^2 - 5x + 3 = 0$ é $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$, logo, suas raízes são

$$u = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \text{ e } v = \frac{5 - \sqrt{13}}{2};$$

assim,

$$u + 1 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \text{ e } v + 1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}.$$

Denotando $S' = (u + 1) + (v + 1)$ e $P' = (u + 1)(v + 1)$, temos

$$S' = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} + \frac{7 - \sqrt{13}}{2} = 7$$

e

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2} \right) \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2} \right) \\ &= \frac{7^2 - \sqrt{13}^2}{4} = \frac{49 - 13}{4} = 9. \end{aligned}$$

De acordo com (2) (com S' no lugar de S e P' no lugar de P), vemos que a equação de segundo grau cujas raízes são $u + 1$ e $v + 1$ é $x^2 - S'x + P' = 0$, ou seja:

$$x^2 - 7x + 9 = 0.$$

□

Exemplo 7. Indique qual das equações abaixo possui como raízes os números $x_1 = 3$ e $x_2 = 1/3$:

(a) $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

(b) $-3x^2 + 10x + 3 = 0$.

(c) $x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$.

(d) $-x^2 + \frac{10}{3}x - 1 = 0$.

Solução. Como $x_1 + x_2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ e $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, segue de (2) que uma equação possível é:

$$x^2 - \frac{10x}{3} + 1 = 0.$$

Observe que, multiplicando essa equação por -1 , obtemos a equação do item (d). Além disso, nenhum dos demais itens resolve o problema; de fato, as equações dos itens (a) e (c) não servem, pois ambas possuem como soma de suas raízes o número $-10/3$; o item (b) também não é solução, pois possui como produto de suas raízes o número $3/(-3) = -1$.

Portanto, a resposta correta é o item (d). □

Exemplo 8. Resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 20 \\ u + v = 6. \end{cases}$$

Solução. Inicialmente, a ideia é usar as equações dadas para obter um sistema da forma

$$\begin{cases} uv = P \\ u + v = 6, \end{cases}$$

o qual já sabemos (por (2)) resolver: u e v serão as raízes da equação de segundo grau

$$x^2 - Px + 6 = 0.$$

Para tanto, veja que

$$\begin{aligned} 2uv &= (u + v)^2 - (u^2 + v^2) \\ &= 6^2 - 20 = 16, \end{aligned}$$

logo, $uv = 8$. Dessa forma, u e v são as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Tais raízes são 2 e 4, de forma que $u = 2$ e $v = 6 - 2 = 4$, ou $u = 4$ e $v = 6 - 4 = 2$. $\square$

A seguir, temos um exemplo mais sofisticado de aplicação das fórmulas de Viète, retirado da referência [1] e que foi proposto numa das edições da Olimpíada Cearense de Matemática (OCM), para o Ensino Fundamental.

Exemplo 9 (OCM). *Sejam p e q reais dados. Se as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ forem reais, positivas e distintas, mostre que o mesmo ocorre com as raízes da equação $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p) = 0$.*

Prova. Note inicialmente que $q \neq 0$, pois do contrário a equação $x^2 + px + q = 0$ se reduziria a $x^2 + px = 0$ e, daí, teria uma raiz igual a 0, contradizendo nossas hipóteses.

Agora, sejam Δ e Δ' os discriminantes dos trinômios $x^2 + px + q = 0$ e $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p)$, respectivamente. Mostremos primeiro que $\Delta' > 0$, o que garantirá que as raízes da segunda equação também são reais e distintas.

Como a equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais e distintas, temos $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta' &= (p - 2q)^2 - 4q(1 - p) \\ &= p^2 - 4q + 4q^2 \\ &= \Delta + 4q^2 > 0. \end{aligned}$$

Para mostrar que as raízes de $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p) = 0$ são positivas, basta mostrarmos que a soma S' e o produto P' das mesmas são ambos positivos (pois essa é a única maneira de dois números reais terem soma e produto positivos). Ora, uma vez que as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ são positivas, as fórmulas de Viète garantem que $-p > 0$ e $q > 0$. Portanto, novamente por elas, temos

$$S' = \frac{2q - p}{q} = 2 + \frac{-p}{q} > 0$$

e

$$P' = \frac{1 - p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{-p}{q} > 0.$$

□

2 A forma fatorada de um trinômio de segundo grau

Substituindo S por $x_1 + x_2$ e P por x_1x_2 em (2) e fatorando a expressão obtida, obtém-se uma terceira maneira de expressar nossa equação original $x^2 - Sx + P = 0$. Vejamos:

$$\begin{aligned} x^2 - Sx + P = 0 &\iff x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0 \\ &\iff x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0 \\ &\iff x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0 \\ &\iff (x - x_1)(x - x_2) = 0. \end{aligned}$$

A expressão $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ é conhecida como a **forma fatorada** da equação de segundo grau.

Recorde que o produto de dois números reais é zero se e só se um deles for zero. Logo, a igualdade acima acontece se e só se $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$, ou seja, quando $x = x_1$ ou $x = x_2$ (como era esperado, já que estas são as únicas raízes da equação original).

De modo mais geral, uma expressão do tipo $ax^2 + bx + c$, pode ser escrita como $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ que, por sua vez, pode

ser fatorada como $a(x - x_1)(x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Assim,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja tratado em dois encontros de 50 minutos e que, além disso, seja dedicado outro encontro para a resolução de exercícios mais avançados. O Caderno de Exercícios deste módulo, em especial, possui uma grande quantidade de exercícios já resolvidos e que *não* são meras aplicações da fórmula de Bhaskara.

Fórmulas para a soma e o produto das raízes de uma equação polinomial de grau qualquer também são conhecidas. Para um polinômio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, a soma das raízes de $p(x) = 0$ é igual a $-a_{n-1}/a_n$, enquanto o produto das raízes é igual a $(-1)^n a_0/a_n$. Existem, ainda, relações dos demais coeficientes com outras somas de produtos das raízes. Tais relações, são conhecidas como as *relações de Girard-Viète* e generalizam as relações de Viète aqui discutidas.

A referência [1] discute equações de segundo grau exaustivamente. A referência [2] discute números complexos e equações polinomiais de graus quaisquer, também exaustivamente.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2024.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*, segunda edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016.