Material Teórico - Módulo de Função Logarítmica

Resolução de Exercícios

Primeiro Ano - Médio

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de julho de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, discutimos alguns exercícios sobre funções logarítmicas.

Exemplo 1 (ENEM - 2018). *Em março de* 2011*, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão, matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é* $R = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$ *em que* A *é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo,* A_0 *é uma amplitude de referência e* log *representa o logaritmo na base* 10*. A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é igual a:*

(a) 1,28.

(b) 2,0.

(c) $10^{\frac{9}{7}}$.

(d) 100.

(e) $10^9 - 10^7$.

Solução. Se A_J e A_G forem as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina, o enunciado do problema nos informa que $9 = \log(\frac{A_J}{A_0})$, enquanto que $7 = \log(\frac{A_G}{A_0})$. Deste modo, $\frac{A_J}{A_0} = 10^9$, $\frac{A_G}{A_0} = 10^7$ e a relação segue: $\frac{A_J}{A_G} = \frac{\frac{A_J}{A_0}}{\frac{A_G}{A_0}} = \frac{10^9}{10^7} = 10^2 = 100$. Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**. $\square$

Exemplo 2 (ITA - 1975). *A respeito da equação exponencial* $4^x + 6^x = 9^x$*, podemos afirmar:*

(a) $x = 9\log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ *é uma raiz.*

(b) $x = \left[\log\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ *é uma raiz.*

(c) $x = \left[\log\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ *é uma raiz.*

(d) $x = \left[\log\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)$ *é uma raiz.*

(e) *nda.*

Solução. Vamos reescrever a equação dada em termos de potências nas bases 2 e 3: $(2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = (3^x)^2$. Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $(2^x)^2$, obtemos a equação equivalente

$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2.$$

Portanto, $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ é uma solução positiva da equação quadrática $1 + x = x^2$. Como $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ são as soluções dessa equação, concluímos que $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aplicando log, obtemos $x \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right)^x = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, de sorte que $x = \left[\log\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Assim, a alternativa correta é a letra **(b)**. $\square$

Exemplo 3 (IME - 1997/Adaptado). *Se x e y são números reais positivos satisfazendo o sistema*

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = \alpha x, \end{cases}$$

em que $\alpha \neq 1$, calcule x e y em função de α.

Solução. Como $0 < \frac{y}{x} = \alpha \neq 1$, podemos aplicar $\log_\alpha$ em ambos os membros das equações do sistema acima, obtendo

$$\begin{cases} y \cdot \log_\alpha x = x \cdot \log_\alpha y \\ \log_\alpha y = 1 + \log_\alpha x. \end{cases}$$

Substituindo y por αx no primeiro membro da primeira equação, vem que

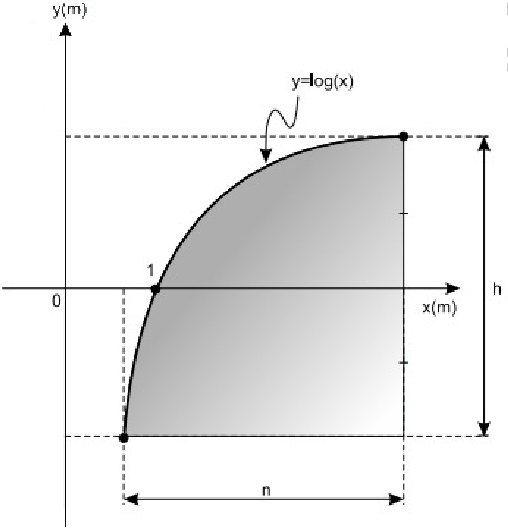
$$\begin{cases} \alpha x \cdot \log_\alpha x = x \cdot \log_\alpha y \\ \log_\alpha y = 1 + \log_\alpha x \end{cases},$$

o que equivale, cancelando x, a

$$\begin{cases} \alpha \cdot \log_\alpha x = \log_\alpha y \\ \log_\alpha y = 1 + \log_\alpha x. \end{cases}$$

Observe que o sistema inicial, não linear, foi transformado num sistema linear nas incógnitas $\log_\alpha x$ e $\log_\alpha y$. Resolvendo esse sistema, obtemos $\log_\alpha x = \frac{1}{\alpha-1}$ e $\log_\alpha y = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Portanto, $x = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ e $y = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. $\square$

Exemplo 4 (ENEM - 2015). *Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = \log(x)$, conforme a figura. A forma do*



vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros. A expressão algébrica que determina a altura do vidro é:

(a) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right).$

(b) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) - \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right).$

(c) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) + \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right).$

(d) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right).$

(e) $2\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right).$

Solução. Os extremos do arco do gráfico da função log, indicado na figura, são da forma $(u, \log u)$ e $(v, \log v)$, em que $0 < u < v$. Como o eixo das abscissas divide ao meio a altura, vale $\log v = \frac{h}{2} = -\log u = \log(\frac{1}{u})$. A injetividade da função log nos garante então que $v = \frac{1}{u}$, ou ainda, $uv = 1$. Substituindo esta relação na igualdade $n = v - u$, e multiplicando ambos os membros por v, obtemos $nv = v^2 - 1$, ou seja, $v^2 - nv - 1 = 0$. Sendo v positivo, a fórmula de Bhaskara nos dá $v = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$. Portanto, $h = 2\log v = 2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$, de modo que a alternativa correta é a letra **(e)**. $\square$

Exemplo 5. *Um determinado software produz gráficos de funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais, bem como o gráfico da função logaritmo natural. Se f e g são funções da lista anterior, o programa também produz o gráfico do resultado de uma operação $f * g$, em que $*$ pode representar a adição, subtração, multiplicação, divisão ou composição de duas funções. Mostre que este software é capaz de produzir:*

(i) *O gráfico de qualquer função logarítmica.*

(ii) *O gráfico da função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^\alpha$, sendo α um número real arbitrário.*

Solução. Para o item (i), observe que a fórmula de mudança de base nos permite escrever $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, quaisquer que sejam os números reais positivos x e $a \neq 1$. Portanto, $\log_a = k \cdot \ln$, sendo $k = 1/\ln a$. Como o programa produz gráficos de funções constantes não nulas (que são as funções polinomiais de grau zero), deve produzir também o gráfico da função produto entre a função constante igual a k e a função logarítmo natural, isto é, o software produz o gráfico da função logarítmica de base a.

Quanto a (ii), basta observar que $f(x) = e^{\alpha \ln x}$, pois $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. Se o programa consegue produzir o gráfico da função produto $x \mapsto \alpha \ln x$, ele também consegue produzir o gráfico da composta dela com a função exponencial de base e, ou seja, o software produz o gráfico da função f. $\square$

Exemplo 6 (PROFMAT - ENQ/2018.1). *Isótopos radioativos de um elemento químico estão sujeitos a um processo de decaimento radioativo. Com o passar do tempo, uma amostra de tais isótopos vai se desintegrando, isto é, emitindo radiação e se transformando em uma amostra de átomos mais estáveis. Sabe-se que este decaimento é de tipo exponencial, isto é, denotando por $m(t)$ a massa de um determinado isótopo radioativo no instante t, tem-se*

$$m(t) = m_0 \cdot b^t, \tag{1}$$

para algum $0 < b < 1$, sendo $m_0 > 0$ a massa inicial. A meia vida desse isótopo, denotada T, é o tempo necessário para que a massa m se reduza à metade de seu valor inicial.

(a) *Calcule b em função de T.*

(b) *Calcule, em função de T, o tempo necessário para que m se reduza a um terço de seu valor inicial.*

Solução. Para o item (a), como m_0 é a massa do isótopo no instante $t = 0$, a definição de *meia vida* nos garante que a massa no instante T, $m(T)$, deve ser a metade da massa inicial, isto é, $m(T) = \frac{m_0}{2}$. Logo, a equação (1) nos permite escrever $m_0 b^T = \frac{m_0}{2}$ ou, ainda, $b^T = \frac{1}{2}$. Assim,

$$b^T = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \Rightarrow b = 2^{-\frac{1}{T}}.$$

Quanto a (b), seja T' o tempo necessário para que a massa m se reduza a um terço de seu valor inicial. Assim, por (1), $m_0 b^{T'} = m(T') = \frac{m_0}{3}$, ou seja, $b^{T'} = \frac{1}{3}$. Utilizando o valor de b calculado no item anterior, calculamos:

$$\begin{aligned}(2^{-\frac{1}{T}})^{T'} = \frac{1}{3} &\Rightarrow 2^{-\frac{T'}{T}} = \frac{1}{3}\\ &\Rightarrow -\frac{T'}{T} = \log_2 \frac{1}{3} = -\log_2 3\\ &\Rightarrow T' = (\log_2 3)T.\end{aligned}$$

□

Exemplo 7. *Sejam y e w números reais não nulos. Se os números reais x e z forem positivos e diferentes de 1, mostre que os pares ordenados (x,y) e (z,w) pertencem ao gráfico de uma função logarítmica se, e somente se, $x^w = z^y$.*

Solução. Suponha, inicialmente, quee o gráfico da função $\log_a$ contém os pontos (x,y) e (z,w). Então, $y = \log_a x$ e $w = \log_a z$, ou seja, $a^y = x$ e $a^w = z$. Se elevarmos a w ambos os membros da primeira igualdade acima, e elevarmos a y ambos os membros da segunda igualdade, ficamos com $(a^y)^w = x^w$ e $(a^w)^y = z^y$. Logo,

$$x^w = (a^y)^w = a^{yw} = (a^w)^y = z^y.$$

Reciprocamente, suponhamos que $x^w = z^y$. Queremos encontrar um número real positivo a, diferente de 1, de modo que o gráfico de $\log_a$ "passe" pelos pontos (x,y) e (z,w). Se esse for o caso, então, como já vimos na primeira parte, deve ser $a^y = x$, ou seja, $a = x^{1/y}$. Assim, $x^{1/y}$ é a única escolha possível para a.

Da mesma forma, $z^{1/w}$ é a única escolha possível para uma base b tal que o ponto (z,w) pertença ao gráfico de $\log_b$.

Agora, se $a = x^{1/y}$ e $b = z^{1/w}$, note que $0 < a,b \neq 1$. Por fim, resta mostrar que $a = b$, o que é imediato:

$$x^w = z^y \Rightarrow (x^w)^{\frac{1}{yw}} = (z^y)^{\frac{1}{yw}} \Rightarrow x^{\frac{1}{y}} = z^{\frac{1}{w}} \Rightarrow a = b.$$

$\square$

Exemplo 8. *A função* seno hiperbólico, $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *é definida por* $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. *Mostre que* senh *é bijetiva e calcule a sua inversa.*

Solução. Para mostrar que senh é bijetiva, precisamos provar que, dado um número real arbitrário y, *existe* $x \in \mathbb{R}$ com $y = \operatorname{senh} x$ (o que expressa a sobrejetividade de senh), sendo x o *único* número real com esta propriedade (o que manifesta a injetividade de senh). De outro modo, precisamos provar que, para cada $y \in \mathbb{R}$, a equação $\operatorname{senh} x = y$ possui uma única solução real. Com efeito, a equação $\operatorname{senh} x = y$ se escreve como

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por $2e^x$ e trazendo o termo do 2º membro para o 1º, vemos que a equação $\operatorname{senh} x = y$ equivale è equação exponencial

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Assim, e^x deve ser uma solução positiva da equação quadrática $X^2 - 2yX - 1 = 0$, cujas raízes são $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ e $y + \sqrt{y^2+1} > 0$. Concluímos, pois, que

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x = y &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}). \end{aligned}$$

Em particular, esse cálculo também fornece a expressão da inversa da função senh. Temos $\operatorname{senh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{senh}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. $\square$

Os problemas que seguem são mais desafiadores. Para o próximo exemplo, relembre o **Teorema Fundamental da Aritmética**: *todo número natural maior que* 1 *pode ser escrito como um produto de números primos. Além disso, tal decomposição é única, a menos da ordem dos fatores.* Portanto, se $a > 1$ é um número natural, existem $l \in \mathbb{N}$, números primos distintos p_1, p_2, ..., p_l e inteiros positivos r_1, r_2, ..., r_l, univocamente determinados, tais que $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_l^{r_l}$.

Exemplo 9. *Se a e b são inteiros maiores que* 1 *tais que $\log_a b$ é um número racional, mostre que a e b são potências de um mesmo inteiro positivo. Em particular, $\log_a b$ é um número irracional se a e b são primos entre si.*

Solução. Seja $\log_a b = \frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos e relativamente primos. Assim, $b = a^{\frac{m}{n}}$, ou ainda,

$$b^n = a^m. \tag{2}$$

Dessa igualdade, vemos que os inteiros a e b admitem os mesmos divisores primos. Com efeito, se p é primo, então p divide $a \Leftrightarrow p$ divide $a^m \Leftrightarrow p$ divide $b^n \Leftrightarrow p$ divide b. Portanto, se p_1,p_2, ...,p_l são os divisores primos de a e b, vale $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_l^{r_l}$ e $b = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}$, para certos inteiros positivos $r_1,r_2,\ldots,r_l,s_1,s_2,\ldots,s_l$.

Da relação (2), vem $(p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l})^n = (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_l^{r_l})^m$, isto é,

$$p_1^{ns_1} \cdot p_2^{ns_2} \cdots p_l^{ns_l} = p_1^{mr_1} \cdot p_2^{mr_2} \cdots p_l^{mr_l}.$$

Como a decomposição em fatores primos é única, segue-se que

$$ns_i = mr_i, \tag{3}$$

para cada $1 \leq i \leq l$. Como m divide ns_i e m é primo com n, concluímos que m deve dividir s_i, digamos $s_i = mt_i, t_i \in \mathbb{Z}^+, \forall\, i$. Daí e de (3), vem que $r_i = nt_i$ para todo i, e a conclusão segue: definindo $c = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdots p_l^{t_l}$, obtemos

$$\begin{aligned} a &= p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_l^{r_l} \\ &= p_1^{nt_1} \cdot p_2^{nt_2} \cdots p_l^{nt_l} \\ &= (p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdots p_l^{t_l})^n = c^n; \end{aligned}$$

analogamente, $b = c^m$, como queríamos. □

Exemplo 10.

(*i*) *Mostre que a função* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \log_{x+1} x$, *é injetiva.*

(*ii*) *Resolva a equação* $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.

Solução. Para o item (i), provaremos que f *é crescente.* Ora,

$$\begin{aligned} 1 - f(x) &= 1 - \log_{x+1} x \\ &= 1 - \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \\ &= \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\ln(x+1)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln(x+1)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x+1)}, \end{aligned}$$

qualquer que seja o número real positivo x.

Como as funções $0 < x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ e $0 < x \mapsto \frac{1}{\ln(x+1)}$ são positivas e decrescentes, o mesmo ocorre com o seu produto, ou seja, $1 - f$ é uma função decrescente. Daí, é fácil concluir que f é crescente, como queríamos.

(ii) Com a mudança de variável $y = \sqrt{x}$, a equação proposta se escreve como $\log_2(1 + y) = \log_3 y^2$, ou ainda, $2\log_3 y = \log_2(1+y)$. Expressando os logaritmos na base $y+1$, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\log_{y+1} y}{\log_{y+1} 3} = \frac{1}{\log_{y+1} 2} &\Leftrightarrow \log_{y+1} y = \frac{\log_{y+1} 3}{2\log_{y+1} 2} \\ &\Leftrightarrow \log_{y+1} y = \frac{\log_{y+1} 3}{\log_{y+1} 4} \\ &\Leftrightarrow \log_{y+1} y = \log_4 3. \end{aligned}$$

Agora, o item (i) garante que $\log_{y+1} y = \log_4 3 \Leftrightarrow y = 3$. Logo, $x = y^2 = 9$ é a única solução da equação. $\square$

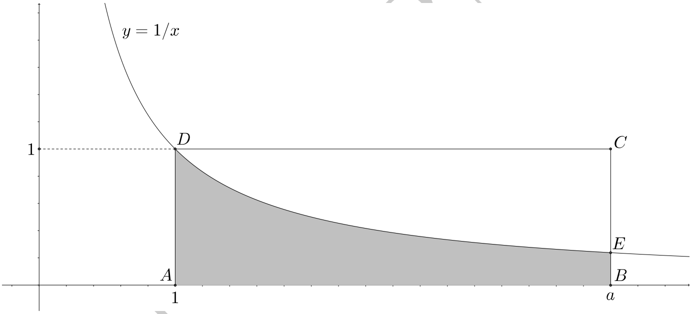
Para o próximo problema, sejam a um número real positivo e S_a a área da região limitada pela hipérbole $y = 1/x$, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$. Então, dos estudos já realizados em módulos anteriores, sabemos que $\ln a = S_a$, se $a > 1$, e $\ln a = -S_a$, caso $0 < a < 1$.

Exemplo 11. *Mostre que, se a é um número real positivo, então*

$$\ln a \leq a - 1. \tag{4}$$

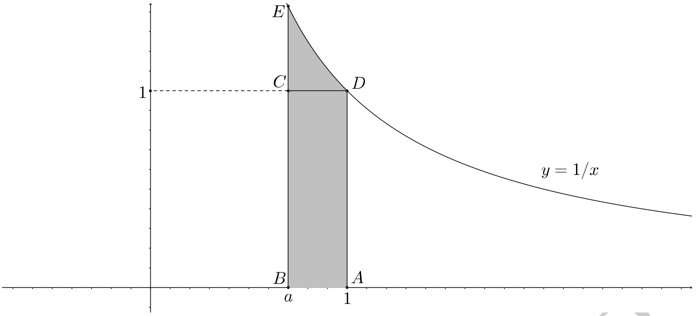
Prove também que a igualdade ocorre se, e só se, $a = 1$.

Solução. Inicialmente, suponhamos $a > 1$. Observe o gráfico abaixo. O "trapézio curvilíneo" $ABED$ tem área $\ln a$, en-



quanto que o retângulo $ABCD$ tem área $(a - 1) \cdot 1$. Como a área de $ABED$ é menor que a área de $ABCD$, vem $\ln a < a - 1$. Esta mesma desigualdade é válida caso $0 < a < 1$. A ideia é a mesma, comparação de áreas. Vejamos: agora a área de $ABED$ é maior que a área de $ABCD$. Como a área de $ABED$ é $-\ln a$ e a área de $ABCD$ é $(1 - a) \cdot 1$, obtemos $-\ln a > (1 - a)$, ou seja, $\ln a < a - 1$, como queríamos.

É claro que $\ln a$ e $a - 1$ são iguais (a zero) caso $a = 1$. Tendo provado acima que $0 < a \neq 1 \Rightarrow \ln a < a - 1$, podemos concluir que vale a desigualdade $\ln a \leq a - 1$, qualquer que seja $a > 0$, com igualdade se, e só se, $a = 1$. $\square$



O problema anterior nos permite demonstrar uma importante desigualdade: a *desigualdade entre as médias*. Antes, porém, algumas definições: dados n números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos a *média aritmética* A daqueles números por

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

e a média geométrica G por

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Exemplo 12. *Prove a desigualdade entre as médias: $G \leq A$, ou seja, mostre que*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{5}$$

quaisquer que sejam os números reais positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Prove também que a igualdade entre a médias ocorre se, e só se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Solução. Se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, ambas as médias geométrica e aritmética resultam em a, ou seja, ocorre a igualdade entre as médias.

Supondo que a_1,a_2,$\ldots$,a_n não são todos iguais, queremos provar agora que $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < A$, sendo A a média aritmética dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Utilizaremos a desigualdade (4) para cada um dos números $a_i/A, i = 1,2,\ldots,n$, na forma $\frac{a_i}{A} \geq \ln(\frac{a_i}{A})+1$. Alguma dessas desigualdades deve ser estrita, uma vez que os números a_i/A não são todos iguais a 1. Concluímos, então, que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A} > \sum_{i=1}^{n}[\ln(\frac{a_i}{A}) + 1].$$

Observando que a média aritmética dos números a_i/A é igual a 1, vem

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\frac{a_1}{A} + \frac{a_2}{A} + \ldots + \frac{a_n}{A}}{n} \\
&> \frac{[\ln\left(\frac{a_1}{A}\right) + 1] + [\ln\left(\frac{a_2}{A}\right) + 1] + \ldots + [\ln\left(\frac{a_n}{A}\right) + 1]}{n} \\
&= \frac{\ln\frac{a_1}{A} + \ln\frac{a_2}{A} + \ldots + \ln\frac{a_n}{A} + n}{n} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{a_1a_2\ldots a_n}{A^n}\right) + 1 \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{A}\right) + 1,
\end{aligned}$$

de modo que $\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{A}\right) < 0$, ou seja, $\frac{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{A} < 1$ ou, ainda, $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} < A$. Portanto, vale a desigualdade entre as médias (5), com igualdade se, e só se, todos os números $a_1,a_2,\ldots,a_n$ forem iguais. □

No último exemplo desta lista, tem-se o problema do cálculo do número n de algarismos de um inteiro positivo N. Sabemos que

$$n = \lfloor\log N\rfloor + 1,$$

em que $\lfloor x\rfloor$ denota o maior inteiro que não supera o número real x (cf. Seção 3 do material referente à aula *Função Logarítmica e Propriedades - Parte 1*, do módulo *Função Logarítmica*, do primeiro ano do Ensino Médio).

Exemplo 13. *Calcule o número de dígitos do inteiro* 5^{500}.

Solução. Um modo rápido de resolver este exercício consiste em usar uma calculadora para estimar $500\log 5$: como $500\log 5 \cong 349{,}4$, com uma casa decimal exata, temos

$$\lfloor \log 5^{500} \rfloor = \lfloor 500\log 5 \rfloor = 349,$$

e o número de dígitos de 5^{500} é $349 + 1 = 350$.

Sem calculadora, podemos fazer o seguinte. Se M e N representam os números de algarismos de 2^{500} e 5^{500}, respectivamente, então $M+N = 501$. Com efeito, da definição de maior inteiro, vem

$$M - 1 < 500\log 2 < M \quad \text{e} \quad N - 1 < 500\log 5 < N.$$

(Observe que, pelo exemplo 9, $\log 2$ e $\log 5$ são números irracionais.) Somando membro a membro tais desigualdades, obtemos

$$M + N - 2 < 500\log 2 + 500\log 5 < M + N.$$

Como

$$500\log 2 + 500\log 5 = 500\log(2\cdot 5) = 500$$

e o único inteiro maior que $M + N - 2$ e menor que $M + N$ é $M + N - 1$, concluímos que $M + N - 1 = 500$, ou seja, $M + N = 501$. Daí, só precisamos calcular M, o número de algarismos de 2^{500}. Para estimar $500\log 2$, primeiro observe que $\frac{1}{\ln 10} < \frac{1}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
0 < 10\log 2 - 3 &= \log 1024 - \log 1000 \\
&= \log\left(\frac{1024}{1000}\right) = \log\left(1 + \frac{24}{1000}\right) \\
&= \frac{\ln\left(1 + \frac{24}{1000}\right)}{\ln 10} < \frac{1}{2}\cdot \ln\left(1 + \frac{24}{1000}\right) \\
&< \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{1000} = 0{,}012,
\end{aligned}$$

em que a desigualdade (4) foi ultilizada na linha anterior com $a = 1 + \frac{24}{1000}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 < 10\log 2 - 3 < 0{,}012 &\Rightarrow 3 < 10\log 2 < 3{,}012 \\ &\overset{\times 50}{\Rightarrow} 150 < 500\log 2 < 150{,}6 \\ &\Rightarrow \lfloor 500\log 2 \rfloor = 150. \end{aligned}$$

Logo,

$$M = \lfloor \log 2^{500} \rfloor + 1 = \lfloor 500\log 2 \rfloor + 1 = 151,$$

e segue que $N = 501 - M = 350$, como esperávamos. $\square$

Dicas para o Professor

Antes de iniciar as soluções, pode ser útil fazer uma revisão do conteúdo, destacando-se as principais ideias envolvidas nos argumentos. Em seguida, é fortemente recomendável que o professor incentive os alunos a produzirem as suas próprias soluções, indicando, se necessário, uma estratégia argumentativa. Finalmente, sugerimos que as resoluções sejam apresentadas em detalhes e problemas correlatos sejam discutidos com a turma. Dessa forma, três ou quatro sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material.

As referências a seguir contêm mais exercícios sobre funções logarítmicas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 1.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol.* 3*. Introdução à Análise.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.