Material Teórico - Módulo de Expressões Algébricas e Polinômios

Parte 1

Oitavo Ano

Prof. Ulisses Lima Parente

Portal da Matemática

OBMEP

1 Expressões algébricas

Em muitas situações, é conveniente denotar um número real arbitrário por uma letra, com o objetivo de fazer operações com esse número, mesmo sem saber o seu valor. Por exemplo, se denotarmos um número real por x, então seu dobro será $2x$, seu triplo $3x$, sua metade $\frac{1}{2}x$ e sua terça parte $\frac{1}{3}x$.

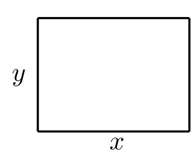
Ao longo deste módulo, denominaremos números reais arbitrários de **variáveis**, e os denotaremos por letras minúsculas do nosso alfabeto: x, y, z, etc. Uma **expressão algébrica** é o resultado de um número finito de operações (escolhidas dentre adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) entre variáveis, sempre que os resultados de tais operações fizerem sentido no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. As expressões algébricas serão denotadas por letras maiúsculas: E, F, G, etc. São exemplos de expressões algébricas:

$$E = 3x^2 - \frac{5}{2}y^3 \text{ e } F = \frac{\sqrt[3]{a^2+bc^3}}{a^2+b^2+1}.$$

Por vezes, escreveremos $E(x, y)$ e $F(a, b, c)$ para denotar as expressões algébricas acima. Mais geralmente, escrevemos $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para denotar uma expressão algébrica nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

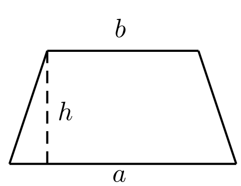
Abaixo, listamos algumas situações que ilustram o uso de expressões algébricas.

Exemplo 1. *O retângulo da figura abaixo tem lados de comprimentos x e y. Seu perímetro é dado pela expressão algébrica $E = 2x + 2y$ e sua área é dada pela expressão $A = xy$.*



Exemplo 2. *A área do trapézio dado na figura abaixo é dada pela expressão algébrica*

$$A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}.$$



Exemplo 3. *Joaquim possui, em seu sítio, x bois e y galinhas. A expressão algébrica que indica o número que encontramos ao contar as patas de todos os animais existentes no sítio de Joaquim é $E = 4x + 2y$.*

Se uma expressão algébrica não envolve a operação de radiciação sobre variáveis, ela é chamada de **expressão algébrica racional**. As expressões algébricas racionais podem ser **inteiras**, caso não apresentem operações de divisão envolvendo alguma variável no denominador, ou **fracionárias**, caso contrário. Quando uma expressão apresenta operação de radiciação em alguma variável, a chamamos **expressão algébrica irracional**. Veja os exemplos:

Exemplo 4. *A expressão algébrica*

$$-\sqrt{3}a^2b^3 + \frac{3}{11}ab^4 + \frac{15}{19}a^3b^2$$

é inteira. Realmente, os radicais e frações que aparecem não envolvem as variáveis.

Exemplo 5. *A expressão algébrica*

$$\frac{x^3 - 4xyz + 3x^2z}{\sqrt[3]{31}xy^2z^3 - x^2y^2z^2}$$

é fracionária.

Exemplo 6. *A expressão algébrica*

$$\sqrt{m+n+p-1} + \frac{3p^3q^2 - 2m^2np}{5 + 2m^4n^2 + m^2n^4p^6}$$

é irracional.

Observe que as expressões algébricas dos exemplos 5 e 6 não fazem sentido para $x = y = z = 0$ e $m+n+p < 1$, respectivamente. Entretanto, ao escrevermos uma certa expressão algébrica, você deve ter em mente que estamos assumindo, *implicitamente* (isto é, sem dizer *explicitamente*) que as variáveis só assumem valores reais para os quais a expressão tem sentido.

2 Valores numéricos de uma expressão

Um **valor numérico** de uma expressão algébrica é o número real obtido quando atribuímos valores (números reais) às variáveis que compõem a expressão.

Exemplo 7. *O valor numérico da expressão algébrica $E(x, y) = 4x^2 - 5xy + 3y^2$ para os valores $x = 2$ e $y = 3$ é*

$$4\cdot 2^2 - 5\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 = 4\cdot 4 - 30 + 3\cdot 9 = 16 - 30 + 27 = 13.$$

Como o exemplo anterior deixa claro,

> Quando substituímos as variáveis de uma expressão algébrica por valores numéricos, a expressão algébrica transforma-se em uma expressão numérica.

Exemplo 8. *Qual a área do trapézio cujas bases medem 3cm e 2cm, e cuja altura mede 4cm?*

Solução. Sabemos que a área do trapézio é dada por

$$A = \frac{(a+b)\cdot h}{2},$$

em que a e b são as medidas das bases e h é a medida da altura do trapézio. Atribuindo os valores $a = 3cm$, $b = 2cm$ e $h = 4cm$, obtemos

$$A = \frac{(3+2)\cdot 4}{2} = 10cm^2.$$

□

Exemplo 9. *O valor numérico da expressão algébrica* $E(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *para* $x = -1$ *é*

$$\begin{aligned} E(-1) &= (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

3 Monômios

Um **monômio** é uma expressão algébrica dada pelo produto de um número real não nulo por um número finito de potências de expoentes inteiros e não negativos, cujas bases são variáveis. Por exemplo, $-3x^2$, $\frac{1}{2}m^3n$, $-\frac{\sqrt[3]{11}}{3}a^9b^2$ e $\sqrt{3}xyz^3$ são monômios. Um monômio possui uma **parte literal**, formada pelo produto das potências das variáveis, além de uma **parte numérica**, chamada de **coeficiente** do monômio, formada pelo número real que antecede a parte literal. Nos exemplos acima, as partes literais são, respectivamente, x^2, m^3n, a^9b^2 e xyz^3, enquanto que os coeficientes são -3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt[3]{11}}{3}$ e $\sqrt{3}$.

O **grau** de um monômio é a soma dos expoentes das potências que compõem sua parte literal. Os graus dos monômios dos exemplos acima são, respectivamente, 2, 4, 11 e 5.

Dizemos que dois ou mais monômios são **semelhantes** se possuem a mesma parte literal.

Exemplo 10. *Os monômios* $-4x^2y^3z$ *e* $\sqrt{5}x^2y^3z$ *são semelhantes, pois ambos possuem parte literal igual a* x^2y^3z.

Exemplo 11. *Os monômios* m^3n^2, $\frac{3}{4}m^3n^2$ *e* $\sqrt{2}m^3n^2$ *são semelhantes, pois os três possuem parte literal igual a* m^3n^2.

Exemplo 12. *Já os monômios* $-4p^5q^4$ *e* $-2p^4q^5$ *não são semelhantes, pois possuem partes literais distintas.*

Observe os seguintes exemplos, lembrando que variáveis representam números reais arbitrários e notando que operamos com as variáveis utilizando as propriedades das operações usuais com números reais (por exemplo, distributividade da multiplicação em relação à adição, regras de potenciação e radiciação, etc).

Exemplo 13.

$$4ab^3 - 3ab^3 + 6ab^3 = (4 - 3 + 6)ab^3 = 7ab^3.$$

Exemplo 14.

$$\begin{aligned} &-8xy^3 + \frac{1}{2}x^3y^2 + 4xy^3 + \frac{3}{2}x^3y^2 = \\ &= (-8+4)xy^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)x^3y^2 = -4xy^3 + 2x^3y^2. \end{aligned}$$

Para **adicionar** (ou **subtrair**) dois ou mais monômios semelhantes, devemos adicionar (ou subtrair) seus coeficientes e conservar a parte literal comum.

Ao tratarmos com expressões algébricas, a frase **reduzir os monômios semelhantes** significa adicionar ou subtrair todos os grupos de monômios semelhantes, *rezuzindo* cada um desses grupos, a um só monômio, como feito no exemplo 14.

Exemplo 15.

$$\left(5ab^2\right)\cdot\left(-4a^2b^3c^2\right) = -20a^3b^5c^2;$$

$$\frac{45m^8n^7p^3}{9m^3n^2p} = 5m^5n^5p^2, \text{ se } m \neq 0,\ n \neq 0 \text{ e } p \neq 0.$$

Para **multiplicar** (ou **dividir**) monômios, multiplicamos (ou dividimos) os coeficientes e as partes literais.

Vale ressaltar que nem sempre podemos executar uma divisão de monômios. Para que possamos fazê-la, os expoentes das variáveis do numerador têm de ser maiores ou iguais que os expoentes das variáveis correspondentes no denominador. Por exemplo, não podemos executar a divisão de monômios

$$\frac{45m^8n^7p^3}{9m^3n^2p^5},$$

pois, ainda que as mesmas variáveis compareçam no numerador e no denominador, o expoente da variável p no numerador é menor que seu expoente no denominador.

Exemplo 16.

$$\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^4 = \frac{1}{16}x^8y^{12};$$

$$\left(-\sqrt{3}abc^3\right)^2 = 3a^2b^2c^6.$$

Para calcular uma **potência** de um monômio, elevamos tanto o coeficiente quanto a parte literal do monômio à potência indicada.

Exemplo 17.

$$\sqrt{9x^6y^4} = \sqrt{(3x^3y^2)^2} = 3x^3y^2, \ \textit{se } x \geq 0;$$

$$\sqrt[3]{64a^3b^6c^9} = \sqrt[3]{(4ab^2c^3)^3} = 4ab^2c^3.$$

Para extrair a **raiz** $n-$**ésima** de um monômio, extraímos as raízes $n-$ésimas de seu coeficiente e de sua parte literal. Observe que nem sempre a raiz $n-$ésima de um monômio será um monômio.

4 Polinômios

Um **polinômio** é uma expressão algébrica que é dada por uma soma finita de monômios. Por exemplo,

$$3x^2y - 3xy^3 + \sqrt{2}xy + 7,$$

é um polinômio nas variáveis x e y. Utilizamos a notação $P(x)$ para representar um polinômio na variável x, $P(x, y)$ para representar um polinômio nas variáveis x e y, e, mais geralmente, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para representar um polinômio nas variáveis x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Os coeficientes de um polinômio são os coeficientes dos monômios que o compõem. O **grau** de um polinômio é o maior dentre todos os graus dos monômios que o compõem. Denotamos o grau de um polinômio $P(x)$ por ∂P. No exemplo acima, os coeficientes do polinômio são 3, -3, $\sqrt{2}$ e 7 e, uma vez que os graus dos monômios que o compõem são 3, 4, 2 e 0, seu grau é igual a 4.

Aqui trataremos apenas de polinômios com uma variável, isto é, polinômios do tipo $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. São exemplos de polinômios em uma variável

$$P(x) = -2x^4 + \sqrt{5}x^2 - \frac{5}{11} \text{ e } Q(x) = -3x^5 + x^4 - 3x_1^3.$$

Quando o coeficiente do monômio de maior grau de um polinômio é igual a 1, dizemos que o polinômio é **mônico**. Por exemplo, $P(x) = x^3 - 5x^2 + \sqrt{2}$ e $Q(x) = x^{100} - 2x + 1$ são polinômios mônicos.

Dizemos que $P(x)$ é **nulo** (ou **identicamente nulo**), se $P(x) = 0$, para qualquer valor real que se atribua à variável x e, neste caso, escrevemos $P \equiv 0$. A proposição destacada a seguir é um fato conhecido, que será assumido sem maiores comentários:

Um polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é nulo se, e somente se, seus coeficientes são todos nulos, isto é, se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0$.

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são **iguais** (ou **idênticos**) se $P(x) = Q(x)$, para todo valor que se atribua à variável x. Também é um fato conhecido que $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais se, e somente se, possuem os mesmos coeficientes.

Uma **raiz** de um polinômio $P(x)$ é qualquer número real que, uma vez atribuído à variável x, torna o valor numérico de P igual a zero.

Exemplo 18. *Os números reais* 2 *e* 5 *são raízes do polinômio* $P(x) = x^2 - 7x + 10$, *pois, substituindo* x *por* 2 *e por* 5 *obtemos, respectivamente,* $P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$ *e* $P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$.

Exemplo 19. *Os números reais* 1 *e* -1 *são raízes do polinômio* $P(x) = x^{2016} - 1$, *pois* $P(1) = 1^{2016} - 1 = 1 - 1 = 0$ *e* $P(-1) = (-1)^{2016} - 1 = 1 - 1 = 0$. *Por outro lado, considerando o polinômio* $Q(x) = x^{2015} - 1$, *vemos que apenas* 1 *é raiz, pois* $Q(-1) = (-1)^{2015} - 1 = -1 - 1 = -2$. *Mais geralmente, se* n *é par, então* 1 *e* -1 *são raízes do polinômio* $S(x) = x^n - 1$. *Caso* n *seja ímpar, apenas* 1 *é raiz de* $S(x) = x^n - 1$.

Exemplo 20. *O número real* 5 *não é raiz do polinômio do terceiro grau* $P(x) = x^3 - 4x^2 - 24$, *pois* $P(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 24 = 125 - 100 - 24 = 1$.

Se $P(x)$ é um polinômio de grau um, isto é, $P(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, então encontrar as raízes de P é uma tarefa bastante simples. Senão, vejamos:

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = -b \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a},$$

ou seja, a única raiz de P é $x = -\frac{b}{a}$.

Quando $P(x)$ é um polinômio de grau dois, isto é, $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, existe uma fórmula, chamada **fórmula de Bhaskara**, que permite que se determine as raízes através de operações algébricas entre os coeficientes a, b e c. De fato, se $b^2 - 4ac \geq 0$, as raízes de $P(x) = ax^2 + bx + c$ são dadas por

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para polinômios de graus três e quatro, também há fómulas envolvendo apenas operações algébricas com os coeficientes e que explicitam as raízes. Embora existam, tais fórmulas são bem complexas e, o mais das vezes, dão como resultado expressões muito complicadas para as raízes, o que inviabiliza seus usos. Para polinômios de grau maior do que ou igual a cinco, pode ser mostrado que não existe uma expressão algébrica, construída em função dos coeficientes do polinômio, que sirva para determinar as raízes.

5 Adicão e subtração de polinômios

Para **adicionar** (ou **subtrair**) dois polinômios, adicionamos (ou subtraímos) os monômios de um aos do outro e, depois, reduzimos os monômios semelhantes.

Exemplo 21. *Se* $P(x) = 3x^4 - 5x + 4$ *e* $Q(x) = -x^5 + 8x^4 + 8x$*, então*

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (3x^4 - 5x + 4) + (-x^5 + 8x^4 + 8x) \\ &= 3x^4 - 5x + 4 - x^5 + 8x^4 + 8x \\ &= -x^5 + 3x^4 + 8x^4 - 5x + 8x + 4 \\ &= -x^5 + 11x^4 + 3x + 4. \end{aligned}$$

Exemplo 22. *Dados* $P(x) = 9x^6 - 7x^4 + 3x - 2$ *e* $Q(x) = -x^6 + 3x^5 - 8x + 9$*, temos*

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (9x^6 - 7x^4 + 3x - 2) \\ &\quad - (-x^6 + 3x^5 - 8x + 9) \\ &= 9x^6 - 7x^4 + 3x - 2 + x^6 - 3x^5 + 8x - 9 \\ &= 9x^6 + x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 3x + 8x - 2 - 9 \\ &= 10x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 11x - 11. \end{aligned}$$

Observação 23. *Se o polinômio resultante da adição (ou subtração) de dois outros polinômios for não nulo, então seu grau é menor do que ou igual ao maior dos graus dos polinômios-parcela. Em símbolos,*

$$\partial(P + Q) \le \max\{\partial P, \partial Q\}.$$

Exemplo 24. *Se* $P(x) = 2x^3 - 3x + 1$ *e* $Q(x) = -2x^3 + x^2 + 4$*, então*

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^3 - 3x + 1) + (-2x^3 + x^2 + 4) \\ &= 2x^3 - 3x + 1 - 2x^3 + x^2 + 4 \\ &= 2x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 + 4 \\ &= x^2 - 3x + 5. \end{aligned}$$

6 Multiplicação de polinômios

Para **multiplicar** dois polinômios, multiplicamos cada monômio de um deles por todos os monômios do outro. Em seguida, adicionamos os resultados, reduzindo os monômios semelhantes. Assim como com números reais, numa multiplicação de polinômios, os polinômios que estão sendo multiplicados são chamados **fatores** e o resultado é o **produto**.

Exemplo 25. *Se* $P(x) = 2x - 1$ *e* $Q(x) = x + 3$*, então*

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x - 1) \cdot (x + 3) \\ &= 2x \cdot x + 2x \cdot 3 - 1 \cdot x - 1 \cdot 3 \\ &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3. \end{aligned}$$

Conforme mostrado no próximo exemplo, a tarefa de multiplicar cada monômio de um dos polinômios por todos os monômios do outro fica mais simples se utilizarmos a distributividade da adição em relação à multiplicação (que continua válida para polinômios).

Exemplo 26. *Se* $P(x) = x^2 - 2x + 4$ *e* $Q(x) = -2x + 2$*, então*

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^2 - 2x + 4) \cdot (-2x + 2) \\ &= x^2 \cdot (-2x + 2) - 2x \cdot (-2x + 2) \\ &\quad + 4 \cdot (-2x + 2) \\ &= -2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 4x - 8x + 8 \\ &= -2x^3 + 6x^2 - 12x + 8. \end{aligned}$$

Outro dispositivo bastante útil para calcular o produto de dois polinômios é aquele mostrado no exemplo abaixo. Note a semelhança formal entre ele e o dispositivo que utilizamos costumeiramente para multiplicar dois números naturais.

Exemplo 27. *Se* $P(x) = -x^3 + 4x - 11$ *e* $Q(x) = 3x^2 - 8x + 6$*, então calculamos*

$$\begin{array}{ccccccc} & -x^3 & +4x & -11 & & & \\ \times & 3x^2 & -8x & +6 & & & \\ \hline & & & -6x^3 & & +24x & -66 \\ & & 8x^4 & & -32x^2 & +88x & \\ & -3x^5 & & +12x^3 & -33x^2 & & \\ \hline & -3x^5 & +8x^4 & +6x^3 & -65x^2 & +112x & -66 \end{array}$$

Observação 28. *O grau do produto de dois polinômios não nulos é igual à soma dos graus dos fatores, isto é,*

$$\partial(P \cdot Q) = \partial P + \partial Q.$$

Um caso particular de multiplicação de polinômios que vale a pena ser ressaltado é quando os fatores da multiplicação têm ambos grau um, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 29. *Se* $P(x) = x + 5$ *e* $Q(x) = x + 6$*, então*

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x + 5) \cdot (x + 6) \\ &= x^2 + 6x + 5x + 30 \\ &= x^2 + 11x + 30. \end{aligned}$$

Note que $11 = 5 + 6$ *e* $30 = 5 \cdot 6$*. De fato, como você pode verificar sem dificuldade,*

Sempre que multiplicamos $P(x) = x + a$ por $Q(x) = x + b$, obtemos $P(x) \cdot Q(x) = x^2 + Sx + P$, em que $S = a + b$ e $P = ab$.

7 Divisão de polinômios

Começamos esta seção com o seguinte teorema que trata da existência e unicidade do quociente e do resto em uma divisão de polinômios em uma variável x.

Teorema 30. *Dados polinômios $A(x)$ e $B(x) \neq 0$, existem únicos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$, com $\partial R < \partial B$ ou $R = 0$.*

No teorema 30, $A(x)$ é chamado **dividendo**, $B(x)$ é o **divisor**, $Q(x)$ o **quociente** e $R(x)$ o **resto** da divisão. (Note a semelhança com a divisão de números naturais, trocando a relação do resto *ser menor que o divisor* pela relação do resto *ter grau menor que o do divisor*.)

A partir de agora, explicaremos como funciona um dispositivo prático para calcular o quociente e o resto numa divisão de polinômios. Propomos, como exemplo, calcular o quociente e o resto na divisão de

$$A(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3x - 1 \quad \text{por} \quad B(x) = x^2 - 3x + 4.$$

Antes, observe que o termo de maior grau do polinômio quociente $Q(x)$, neste caso, deve ser $5x^2$, pois seu produto por x^2 deve resultar em $5x^4$. Considere, então, o polinômio

$$R_1(x) = A(x) - 5x^2 \cdot B(x) = 15x^3 - 24x^2 + 3x - 1.$$

Como $\partial R_1 = 3 > \partial B$, encontramos o segundo termo de $Q(x)$ dividindo o termo de maior grau de $R_1(x)$ por x^2. Esse termo é igual a $15x$ e, daí, consideramos o polinômio

$$R_2(x) = R_1(x) - 15x \cdot B(x) = 21x^2 - 57x - 1.$$

Como $\partial R_2 = 2 = \partial B$, seguimos, dividindo o termo de maior grau de $R_2(x)$ por x^2. Dessa vez, obtemos 21 como resultado, que é o terceiro termo de $Q(x)$. Agora,

$$R(x) = R_2(x) - 21 \cdot B(x) = 6x - 85$$

satisfaz a condição $\partial R < \partial B$ e, além disso,

$$\begin{aligned} R(x) &= R_2(x) - 21 \cdot B(x) \\ &= R_1(x) - 15x \cdot B(x) - 21 \cdot B(x) \\ &= A(x) - 5x^2 \cdot B(x) - 15x \cdot B(x) - 21 \cdot B(x) \\ &= A(x) - \big(5x^2 + 15x + 21\big) \cdot B(x), \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$Q(x) = 5x^2 + 15x + 21 \quad \text{e} \quad R(x) = 6x - 85.$$

A discussão acima pode ser sintetizada da seguinte forma (uma vez mais, repare na semelhança com o procedimento que empregamos rotineiramente para dividir dois números naturais):

$5x^4$	$+0x^3$	$-4x^2$	$+3x$	-1	$x^2 - 3x + 4$
$-5x^4$	$+15x^3$	$-20x^2$			$5x^2 + 15x + 21$
	$15x^3$	$-24x^2$	$+3x$	-1	$\uparrow$
	$-15x^3$	$+45x^2$	$-60x$		$Q(x)$
		$21x^2$	$-57x$	-1	
		$-21x^2$	$+63x$	-84	
	$R(x)$	$\longrightarrow$	$6x$	-85	

ou, de uma forma ainda mais simples,

5	0	-4	3	-1	1	-3	4
-5	15	-20			5	15	21
	15	-24	3	-1			
	-15	45	-60				
		21	-57	-1			
		-21	63	-84			
			6	-85			

Exemplo 31. *Determinar o resto e o quociente da divisão de $2x^3 - 3x + 8$ por $x + 2$.*

Solução. Utilizando o dispositivo prático mostrado acima, obtemos

2	0	-3	8	1	2	
-2	-4			2	-4	5
	-4	-3	8			
	4	8				
		5	8			
		-5	-10			
			-2			

Daí, segue que

$$2x^3 - 3x + 8 = \big(2x^2 - 4x + 5\big) \cdot (x + 2) - 2,$$

ou seja, $Q(x) = 2x^2 - 4x + 5$ e $R(x) = -2$. □

Numa divisão, quando o divisor é um polinômio mônico de grau um, existe um dispositivo, chamado **algoritmo de Briot-Ruffini**, que permite calcular o quociente e o resto de uma maneira bem mais rápida. Para ver como ele funciona, vamos dividir $A(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ por $B(x) = x - 3$. Então nosso objetivo é determinar $Q(x) = ax^3 + bx_2 + cx + d$ e $R(x) = r \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x),$$

ou seja,

$$\begin{gathered} 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = \\ = \big(ax^3 + bx_2 + cx + d\big) \cdot (x - 3) + r. \end{gathered}$$

Daí, segue que

$$5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4 =$$

$= ax^4 + (b-3a)\,x^3 + (c-3b)\,x^2 + (d-3c)\,x + (r-3d)$,

e obtemos

$$\begin{aligned} & & a &= 5;\\ b-3a=-2 &\implies & b &= 13;\\ c-3b=3 &\implies & c &= 42;\\ d-3c=4 &\implies & d &= 130;\\ r-3d=-4 &\implies & r &= 386. \end{aligned}$$

A discussão acima pode ser reduzida ao seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5 & -2 & 3 & 4 & -4 & 3 \\ \hline 5 & \underbrace{3\cdot 5-2}_{13} & \underbrace{3\cdot 13+3}_{42} & \underbrace{3\cdot 42+4}_{130} & \underbrace{3\cdot 130-4}_{386} & \end{array}$$

Portanto, obtemos, $Q(x) = 5x^3+13x^2+42x+130$ e $R(x) = 386$.

Exemplo 32. *Determine o quociente e o resto na divisão de* $P(x) = 8x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ *por* $Q(x) = x - 2$.

Solução. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini obtemos,

$$\begin{array}{cccc|c} 8 & -5 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 8 & \underbrace{2\cdot 8+(-5)}_{11} & \underbrace{2\cdot 11+5}_{27} & \underbrace{2\cdot 27+3}_{57} & \end{array}$$

Portanto, $Q(x) = 8x^2 + 11x + 27$ e $R(x) = 57$. □

Dicas para o Professor

Reserve uma sessão de 50min para as duas primeiras seções, mais uma sessão de 50min para a terceira seção, e outra sessão de 50min para a quarta e quinta seções. Para cada uma das duas últimas seções, utilize uma sessão de 50min. Na primeira seção, chame a atenção para os tipos de expressões algébricas existentes e ressalte também que, algumas vezes, expressões algébricas fracionárias ou irracionais não fazem sentido para alguns valores reais. Na terceira seção, deixe claro o que são monômios semelhantes. Nas duas últimas seções, fale com cuidado dos dispositivos que tratam da multiplicação e divisão de polinômios. O algoritmo de Briot-Rufinni pode ser omitido numa primeira apresentação. Finalmente, ressalte a semelhança existente entre o algoritmo da divisão de polinômios e o algoritmo da divisão de números inteiros.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios, Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.