Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivadas de Funções Trigonométricas

Exercícios - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Agosto de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Na aula *O Teorema do Sanduíche*, do módulo *Leis do Limite - Parte 1*, estabelecemos o *limite trigonométrico fundamental*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1}$$

Já no exemplo $3-(a)$ dessa mesma aula, apresentamos um outro limite, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, o qual *implica* a relação

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{2}$$

Realmente, basta escrever $(\cos x - 1)/x = -x \cdot (1-\cos x)/x^2$ para concluir aquela igualdade.

Assim, pela definição de derivada, a informação expressa nos limites (1) e (2) se resume a $\operatorname{sen}'(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$, sendo nossa meta estender o cálculo dessas derivadas a qualquer número real.

Mais precisamente, na próxima seção, utilizaremos os limites (1) e (2) para verificar a diferenciabilidade das funções seno e cosseno, provando as relações $\operatorname{sen}' = \cos$, $\cos' = -\operatorname{sen}$. Daí, pelas regras aritméticas de derivação, obteremos as derivadas das demais funções trigonométricas, tg, cotg, sec e cossec.

1 Derivadas das funções trigonométricas

Começaremos com o cálculo da derivada da função seno. Utilizando as fórmulas de adição de arcos da Trigonometria, temos, para $x \in \mathbb{R}$ fixado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \cos x \right] \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.
\end{aligned}$$

Então, (1) e (2) (com h no lugar de x) dão

$$\operatorname{sen}' x = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

O cálculo da derivada da função cosseno é similar, valendo-nos novamente das fórmulas de adição de arcos da Trigonometria, juntamente com (1) e (2):

$$\begin{aligned}
\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} x - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \operatorname{sen} x \right] \\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 = - \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Resumindo a discussão acima, obtivemos o seguinte resultado.

Teorema 1. *As funções seno e cosseno são deriváveis, valendo*

$$\operatorname{sen}' x = \cos x \quad e \quad \cos' x = - \operatorname{sen} x, \tag{3}$$

para cada número real x.

Na verdade, as regras acima mostram que sen e cos são funções *suaves*, ou seja, possuem derivadas de todas as ordens. Mais ainda, as relações

$$\operatorname{sen}' = \cos,\ \operatorname{sen}'' = -\operatorname{sen},\ \operatorname{sen}''' = -\cos,\ \operatorname{sen}^{(4)} = \operatorname{sen}$$

atestam que a sequência das sucessivas derivadas da função seno tem período 4. Um cálculo similar estabelece o mesmo fato para a função cosseno. Daí, fica fácil concluir o próximo resultado.

Proposição 2. *Sejam n um número natural e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ o resto na divisão de n por 4. Então, $\operatorname{sen}^{(n)} = \operatorname{sen}^{(r)}$ e $\cos^{(n)} = \cos^{(r)}$* [1].

[1] Lembre-se de que $f^{(n)}$ denota a derivada de ordem n de f, sendo $f^{(0)} := f$.

Exemplo 3. *Calcule as quatro primeiras derivadas da função* $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Utilizando as regras de derivação e o teorema anterior, temos

$$f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x),$$

$$f''(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x,$$

$$f'''(x) = 2e^x \cos x + 2e^x(-\operatorname{sen} x) = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

e

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + 2e^x(-\operatorname{sen} x - \cos x) \\ &= -4e^x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Prove que a função seno é estritamente côncava no intervalo* $[0, \pi]$.

Solução. Pelo teorema 6 da aula *Propriedades - Parte III*, do módulo *Derivada como Função*, basta mostrar que cos, a derivada de sen, é decrescente em $[0, \pi]$. Por sua vez, de acordo com o teorema 7 (e a observação 9) da aula *Propriedades - Parte I*, do mesmo módulo, isso segue da desigualdade $\cos' = -\operatorname{sen} < 0$ em $(0, \pi)$, que, por sua vez, é consequência da positividade da função seno nesse mesmo intervalo. □

Exemplo 5. *Se* $\operatorname{tg} \theta = \theta$, *mostre que a reta* $y = \cos\theta \cdot x$ *tangencia o gráfico da função seno.*

Solução. Vejamos que a reta $r : y = \cos\theta \cdot x$ tangencia o gráfico de sen no ponto de abscissa θ. A escolha desse ponto é razoável, pois a inclinação da tangente ao gráfico da função seno ali nada mais é que $\operatorname{sen}' \theta = \cos\theta$, a mesma inclinação da reta r. Para concluir, falta apenas verificar que r passa pelo ponto $(\theta, \operatorname{sen}\theta)$, o que segue da hipótese $\operatorname{tg}\theta = \theta$, relação equivalente a $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \cdot \theta$. □

O próximo resultado encerra o cálculo das derivadas de funções trigonométricas.

Teorema 6. *As funções tangente, secante, cotangente e cossecante são (infinitamente) deriváveis em seus respectivos domínios. Além disso, valem as regras*

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x, \quad \operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cossec}^2 x, \tag{4}$$

$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cossec}' x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x. \tag{5}$$

Prova. A diferenciabilidade dessas funções, bem como as fórmulas acima, seguem da regra do quociente para a derivada, já que

$$\operatorname{tg} = \frac{\operatorname{sen}}{\cos}, \quad \operatorname{cotg} = \frac{\cos}{\operatorname{sen}}, \quad \sec = \frac{1}{\cos}, \quad \operatorname{cossec} = \frac{1}{\operatorname{sen}}$$

onde quer que tais funções estejam definidas. Provaremos as primeiras fórmulas em (4) e (5), deixando as demais como exercício.

Pelo teorema 1, vem que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}' x &= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}$$

Além disso, conforme observado após o exemplo 3 da aula *Exercícios - Parte II*, módulo anterior, vale

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}{dx} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

em cada ponto x onde f for derivável e se tenha $f(x) \neq 0$ (isso também é uma consequência da regra de derivação do quociente). Daí, fazendo $f = \cos$, obtemos

$$\sec' x = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \operatorname{tg} x.$$

□

2 Mais alguns exemplos

Exemplo 7. *Se f for a função do exemplo 3, calcule $f^{(200)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.*

Solução. Vimos na solução do exemplo 3 que $f^{(4)} = -4 \cdot f$, com $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$. Daí, $f^{(8)} = -4 \cdot f^{(4)} = (-4)^2 \cdot f$, $f^{(12)} = -4 \cdot f^{(8)} = (-4)^3 \cdot f$ e, mais geralmente, $f^{(4n)} = (-4)^n \cdot f$ para cada natural n. (Convidamos o leitor a justificar essa fórmula por indução matemática.) Sendo $200 = 4 \cdot 50$, obtemos

$$f^{(200)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-4)^{50} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4^{50} e^{\pi/2}.$$

$\square$

Exemplo 8. *Sabe-se que as retas perpendiculares r e s tangenciam o gráfico da função cosseno. Se P for o ponto de interseção dessas retas, determine o menor valor possível da distância de P ao eixo das abscissas.*

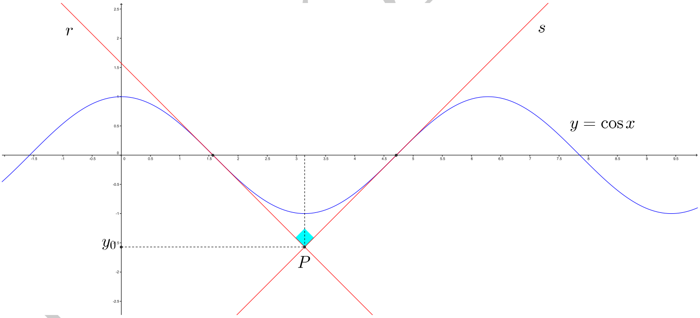


Figura 1: exemplo 8.

Solução. Se $P = (x_0, y_0)$, então $|y_0|$ é a distância de P ao eixo das abscissas, de modo que estamos procurando o valor mínimo que $|y_0|$ pode assumir.

Digamos que as retas r, s tenham inclinações m e n, respectivamente, e tangenciem o gráfico da função cos nos pontos de abscissas a e b, também respectivamente. Então, segue de (3) que $m = -\operatorname{sen} a$, $n = -\operatorname{sen} b$.

Por outro lado, o fato de r e s serem perpendiculares implica $mn = -1$, de sorte que

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = -1, \tag{6}$$

A partir daí, pode-se afirmar que $\operatorname{sen} a = -\operatorname{sen} b = \pm 1$. Com efeito, segue de (6) que $\operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen} b$ têm sinais contrários. Por outro lado, se alguma das desigualdades $|\operatorname{sen} a| \leq 1, |\operatorname{sen} b| \leq 1$ fosse estrita, teríamos

$$|\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b| = |\operatorname{sen} a| \cdot |\operatorname{sen} b| < 1,$$

em contradição com a igualdade $|\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b| = 1$. Daí, $\operatorname{sen} a = \pm 1$, $\operatorname{sen} b = \mp 1$ e a afirmação segue.

Supondo, sem perda de generalidade, $\operatorname{sen} a = 1$ e $\operatorname{sen} b = -1$, vem que $a = \pi/2 + 2k\pi$, $b = -\pi/2 + 2l\pi$, para certos inteiros k, l. Desse modo, notando que $\cos a = \cos b = 0$, as retas r, s se expressam pelas equações $y = x - a$, $y = b - x$, respectivamente.

Recordando que $P = (x_0, y_0)$ é comum a r e s, temos as igualdades $y_0 = x_0 - a$, $y_0 = b - x_0$, que, somadas ordenadamente, dão

$$y_0 = \frac{b-a}{2} = s \cdot \frac{\pi}{2},$$

em que $s := 2(l-k) - 1$ é um inteiro ímpar. Portanto,

$$|y_0| = |s| \cdot \pi/2 \geq \pi/2,$$

com igualdade se, por exemplo, $a = \pi/2 = -b$ (caso em que $k = l = 0$).

Conclui-se, então, que $\pi/2$ é o valor mínimo assumido por $|y_0|$. Em outras palavras, a menor distância possível de P ao eixo das abscissas é $\pi/2$. □

O seguinte resultado auxiliar se mostrará útil diversas vezes.

Lema 9. *Sejam I um intervalo fechado de extremo inferior a e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável, tal que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$. Se $f^{(n)}$ for positiva no interior de I, então f será crescente. Em particular, f e suas derivadas serão positivas no interior de I.*

Prova. Por indução em n. Se $n = 1$, o resultado segue do teorema 7 (e da observação 9) da aula *Propriedades - Parte I* no módulo *Derivada como Função*.

Supondo o resultado verdadeiro para um certo n, seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições no enunciado, com $n + 1$ no lugar de n.

Como $f^{(n)}(0) = 0$ e $[f^{(n)}]' = f^{(n+1)}$ é positiva no interior de I, a base de indução, aplicada à função $f^{(n)}$, permite concluir que tal função é crescente. Daí,

$$x > 0 \Rightarrow f^{(n)}(x) > f^{(n)}(0) = 0,$$

ou seja, $f^{(n)}$ é positiva no interior do intervalo I. Por hipótese de indução, f é crescente e o argumento indutivo está completo. □

Exemplo 10. *Mostre que*

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

para todo x real, com igualdade se, e só se, $x = 0$.

Solução. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1.$$

Interpretando o enunciado do exemplo em termos da função g, pede-se para provar que $g(x) \geq 0$, com igualdade se, e só se, $x = 0$. Como $g(0) = 0$, só precisamos mostrar que $x \neq 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Observando que g é uma função par, a implicação anterior se reduz a

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > 0. \tag{7}$$

A desigualdade $g(x) > 0$ certamente é verdadeira para $x \geq 2\pi$, pois, nesse caso,

$$g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \geq -1 + 2\pi^2 - 1 = 2(\pi^2 - 1) > 0.$$

A análise do sinal de $g(x)$, para valores de x entre 0 e 2π, se faz considerando a função restrição $f = g|_{[0,2\pi)}$. Temos

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + x \quad \text{e} \quad f''(x) = -\cos x + 1,$$

de sorte que $f(0) = f'(0) = 0$, enquanto $f'' > 0$ em $(0, 2\pi)$. Pelo lema acima, $g = f > 0$ nesse intervalo, o que encerra a verificação da desigualdade (7). □

Exemplo 11. *Em um triângulo retângulo de hipotenusa a, seja h a altura relativa à hipotenusa. Se x é a medida em radianos de um dos ângulos agudos desse triângulo, mostre que*

$$h > a(3x - 2\operatorname{tg} x). \tag{8}$$

Solução. A relação (8) pode ser reescrita na forma $ah > a^2(3x - 2\operatorname{tg} x)$, ou melhor,

$$bc > a^2(3x - 2\operatorname{tg} x),$$

em que b, c são as medidas dos catetos do triângulo [2]. Como b/a e c/a são, não necessariamente nessa ordem, iguais a $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, a desigualdade anterior equivale a

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{bc}{a^2} > 3x - 2\operatorname{tg} x,$$

ou ainda,

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} > 3x - 2\operatorname{tg} x,$$

pois $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$. Desse modo, definindo a função $f : [0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = 2\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - 3x,$$

[2] A igualdade $ah = bc$ é uma das relações métricas em triângulos retângulos.

a solução estará encerrada se provarmos que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, \pi/2)$. Para estabelecer essa desigualdade, utilizaremos o lema 9, com $n = 1$.

Primeiramente, recorde que, se g for uma função derivável, então
$$\frac{d(g(kx))}{dx} = k \cdot g'(kx)$$
para cada número real k e cada ponto x no domínio de g [3]. Assim, tomando $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x$, vemos que

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cos 2x) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Portanto,

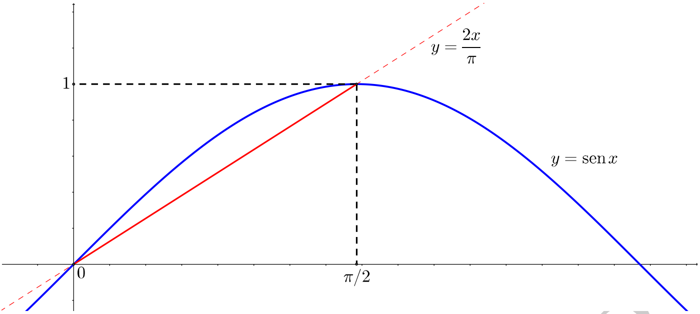
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sec^2 x + (2\cos^2 x - 1) - 3 \\ &= 2(\sec^2 x - 2 + \cos^2 x) \\ &= 2(\sec x - \cos x)^2 > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in (0, \pi/2)$, uma vez que $\sec x - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$ é positivo nesse intervalo. Por fim, sendo $f(0) = 0$, o lema 9 garante $f > 0$ em $(0, \pi/2)$, como desejado. $\square$

Exemplo 12. *Prove que o perímetro de um triângulo acutângulo é maior que o dobro do diâmetro do círculo que o circunscreve.*

Solução. Pelo exemplo 4, a função sen é estritamente côncava no intervalo $[0, \pi]$. Em particular, como a reta $y = (2/\pi)x$ corta o gráfico da função seno nos pontos $(0, 0)$ e $(\pi/2, 1)$, o arco aberto desse gráfico com extremos naqueles pontos situa-se estritamente acima do segmento de reta aberto de mesmas extremidades (acompanhe na figura a seguir). De outro modo, temos
$$\operatorname{sen} x > \frac{2x}{\pi},$$
para todo $x \in (0, \pi/2)$.

[3] Confira o material da aula *Exercícios - Parte II*, no módulo *Fórmulas de Diferenciação.*



Portanto, se o triângulo tiver ângulos internos agudos e iguais a α, β e γ, vale

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma &> \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2\beta}{\pi} + \frac{2\gamma}{\pi} \\ &= 2 \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\pi} = 2. \end{aligned}$$

Por outro lado, se R for o raio do círculo circunscrito do triângulo, seus lados terão, pela Lei dos Senos, medidas iguais a

$$2R\operatorname{sen}\alpha, \quad 2R\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad 2R\operatorname{sen}\gamma.$$

Então, sendo $2p$ o perímetro do triângulo, as relações obtidas até aqui nos permitem escrever

$$2p = 2R(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma) > 2 \cdot 2R,$$

que é a desigualdade desejada. $\square$

Dicas para o Professor

Duas funções trigonométricas f e g são ditas complementares quando assumem o mesmo valor em arcos complementares. Mais precisamente, f e g são complementares quando $g(x) = f(\pi/2 - x)$ para todo x no domíno de g. As funções cos, cotg, cossec são, respectivamente, as funções complementares de sen, tg, sec e vice-versa.

Uma vez conhecida a fórmula para a derivada de uma função trigonométrica f, a regra para derivar sua função complementar consiste em substituir cada função trigonométrica que ocorre na expressão de f' por sua complementar e, ao final, trocar o sinal da expressão. Em símbolos e nas notações da definição acima,

$$g'(x) = -f'(\pi/2 - x).$$

Isso pode facilitar a memorização das fórmulas (3), (4) e (5).

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. R. Gelca e T. Andreescu. *Putnam and Beyond*, 2ª ed. Springer Nature, Cham, 2017.

3. M. Spivak. *Calculus*. 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.