Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 1

O Problema da Tangente

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de julho de 2020

1 Exemplos

Exemplo 1. *A reta que tangencia o gráfico da função* $f : \mathbb{R} - \{0{,}1\} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$, *no ponto* $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, *corta este gráfico em um segundo ponto. Determine as coordenadas desse ponto.*

Solução. Um esboço do gráfico de f e da reta tangente a este gráfico no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ é mostrado na figura abaixo:

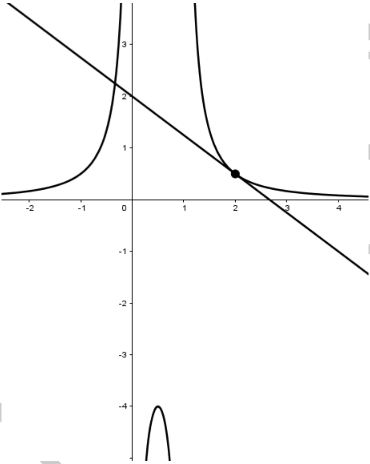

Figura 1: a reta tangente ao gráfico de f no ponto (2,1/2).

Para encontrar o segundo ponto de interseção entre a reta tangente e o gráfico, precisamos resolver o sistema formado pelas equações da curva, $y = \frac{1}{x^2 - x}$ e da reta tangente à curva no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $y - 1/2 = m(x - 2)$.

O coeficiente angular m precisa ser determinado. Faremos isso usando o método desenvolvido na aula *Introdução aos Limites* deste módulo: vamos calcular os valores da fração

$$m(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

quando x se aproxima de 2 (recorde que tal fração é o coeficiente angular da secante ao gráfico passando pelos pontos $(2,f(2))$ e $(x,f(x))$).

Primeiro, vamos simplificar a expressão acima, escrevendo

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{2}}{x-2} \\ &= \frac{2-x^2+x}{2x(x-1)(x-2)} = -\frac{(x+1)(x-2)}{2x(x-1)(x-2)} \\ &= -\frac{x+1}{2x(x-1)}. \end{aligned}$$

Note que, após o cancelamento de $x-2$, a expressão simplificada admite a substituição de x por 2 sem que o denominador se anule. Ao fazermos isso, obtemos $m(2) = -\frac{3}{4}$.

Estamos interessados no valor que esta fração assume quando x *fica arbitrariamente próximo de* 2. Veremos que, neste caso, esse valor coincide com $-\frac{3}{4} = -0{,}75$, que é o valor que a fração assume quando x é igual a 2. Este comportamento homogêneo, e bastante conveniente, de uma função nas proximidades de um ponto de seu domínio é chamado de *continuidade*. Discutiremos isso em detalhe em uma aula futura.

Para termos uma ideia de como $m(x)$ se comporta quando x se aproxima de 2, exibimos abaixo duas tabelas, com valores para x e $m(x)$. Uma das tabelas apresenta valores de x menores do que 2 e a outra apresenta valores de x maiores do que 2.

x	$m(x)$
1,9	$-0{,}84795$
1,99	$-0{,}75884$
1,999	$-0{,}75088$
1,9999	$-0{,}75009$

x	$m(x)$
2,1	$-0{,}671$
2,01	$-0{,}74134$
2,001	$-0{,}74913$
2,0001	$-0{,}74991$

A tabela da esquerda apresenta valores menores do que 2. Neste caso, dizemos que x está se aproximando de 2 *pela* *esquerda*. A tabela da direita apresenta valores maiores do que 2. Neste caso, dizemos que x se aproxima de 2 *pela direita*. Esta nomenclatura se deve à representação dos números reais em um eixo orientado da esquerda para direita, que chamamos de reta real.

Observando as tabelas acima, percebemos que, de fato, $m(x)$ se aproxima de $-0{,}75$ quando x se aproxima de 2. Escrevemos, então

$$\lim_{x\to 2} m(x) = -0{,}75 = -\frac{3}{4}.$$

Assim como fizemos na aula *Introdução aos Limites* deste módulo, vamos admitir também que, quando x se aproxima de 2, a reta secante ao gráfico da função f, e que o corta nos pontos $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ e $(x,f(x))$, se aproxima da reta tangente a este mesmo gráfico no ponto $\left(2,\frac{1}{2}\right)$. Podemos, assim, concluir que o coeficiente angular dessa reta tangente é $m = -3/4$. Portanto, a equação da tangente é $y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}(x-2)$. Simplificando, obtemos a equação $3x + 4y - 8 = 0$.

Como dissemos anteriormente, para encontrar o segundo ponto de interseção, devemos resolver o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{c} y = \frac{1}{x^2-x} \\ 3x + 4y - 8 = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Eliminando y, obtemos $\frac{8-3x}{4} = \frac{1}{x^2-x}$, e, simplificando,

$$3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = 0. \tag{2}$$

Apesar dessa equação ser de terceiro grau, suas soluções são as abscissas dos pontos que pertencem ao gráfico de f e à reta de equação $3x + 4y - 8 = 0$, e sabemos que esta reta tangencia o gráfico no ponto $\left(2,\frac{1}{2}\right)$, de forma que $x = 2$ é uma das soluções de (2).

Mais ainda, $x = 2$ é uma solução *com multiplicidade* 2, pois, no ponto $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ ocorre tangência (veja a discussão sobre tangência e multiplicidade de raízes na aula *Introdução aos Limites* deste módulo). Isso significa que o polinômio em (2) é divisível por $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Fazendo esta divisão, obtemos:

$$3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = 3(x-2)^2\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Portanto, a abscissa do ponto procurado é $x = -1/3$. Substituindo esse valor em $y = \frac{8-3x}{4}$, encontramos a ordenada $y = 9/4$. O segundo ponto de interseção é $\left(-\frac{1}{3}, \frac{9}{4}\right)$. $\square$

Exemplo 2. *Encontre a equação da reta que tangencia o círculo de raio $r > 0$ centrado na origem, em um ponto dado deste círculo.*

Solução. A equação do círculo em questão é $x^2 + y^2 = r^2$. O círculo inteiro não pode ser gráfico de uma função, mas existem gráficos de funções que coincidem com arcos deste círculo. De fato, da equação $x^2 + y^2 = r^2$ podemos obter quatro expressões, duas que expressam y como função de x,

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \text{ e } y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

e duas que expressam x como função de y,

$$x = -\sqrt{r^2 - y^2} \text{ e } x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Os gráficos dessas quatro funções são exibidos na Figura 2.

Note agora que, seja qual for o ponto $P = (a,b)$ sobre o círculo, pelo menos um dos quatro gráficos é um arco de círculo que tem o ponto P em seu interior. Neste caso, vamos dizer que o ponto P está **coberto** por este gráfico.

Por exemplo, para o ponto $(0,r)$, o gráfico de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ cumpre essa condição (veja a Figura 2). Por outro lado, para o ponto $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, podemos usar os gráficos de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e de $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$ (veja a Figura 3 a seguir).

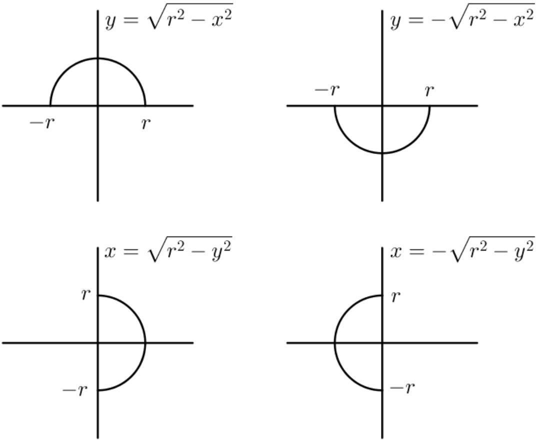

Figura 2: o círculo como união de quatro gráficos de funções.

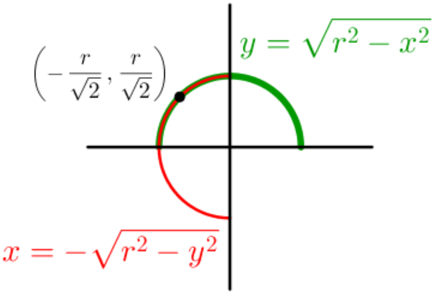

Figura 3: o ponto $\left(\frac{r}{-\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, coberto por dois gráficos.

Agora, se uma reta é tangente ao círculo em $P = (a,b)$ (de sorte que $a^2 + b^2 = r^2$), então a equação dessa reta é

$$y - b = m(x - a) \quad \text{ou} \quad x - a = m(y - b),$$

dependendo de que variável seja considerada como livre.

Por um momento, tomemos a equação da tangente como

$$y - b = m(x - a),$$

de sorte que o ponto P está sobre o gráfico de $y = \sqrt{x^2 - r^2}$ ou $y = -\sqrt{x^2 - r^2}$.

Suponha, sem perda de generalidade, que P esteja sobre o gráfico de $y = \sqrt{x^2 - r^2}$ (de forma que $b > 0$). Então, o coeficiente angular m pode ser encontrado fazendo-se x se aproximar de a na razão

$$m(t) = \frac{\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - a^2}}{x - a} \tag{3}$$

(que é o coeficiente angular da secante ao gráfico por (a,b) e (x,y)).

Podemos simplificar a expressão (3) utilizando um pouco de álgebra elementar:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - a^2}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2}}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2}} \\ &= \frac{(r^2 - x^2) - (r^2 - a^2)}{(x - a)(\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2})} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)}{(x - a)(\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2})} \\ &= \frac{-(x - a)(x + a)}{(x - a)(\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2})} \\ &= \frac{-(x + a)}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Quando x se aproxima de a, a expressão acima se aproxima de

$$m = \frac{-2a}{2\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Portanto, nesse caso, a equação da reta tangente ao círculo no ponto $P = (a,b)$ é

$$y - b = \frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}}(x - a).$$

Em geral, a equação da reta tangente ao círculo no ponto $P = (a,b)$ assume uma das quatro formas a seguir (examine os demais casos em detalhe):

(1) $y - b = \frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}}(x - a)$, se $b > 0$.

(2) $y - b = \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}(x - a)$, se $b < 0$.

(3) $x - a = \frac{-b}{\sqrt{r^2 - b^2}}(y - b)$, se $a > 0$.

(4) $x - a = \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}}(y - b)$, se $a < 0$.

□

2 Um breve diálogo

O diálogo imaginário a seguir é travado entre um cético e alguém (um matemático?) que pretende apresentar ao cético um modo de encontrar a reta tangente a uma curva em um ponto. Vamos chamar o cético de Sr. C e o seu interlocutor de Sr. M.

Sr. C: – Muito bem! Eu tenho uma curva suave que tracei no papel. Escolho um ponto desta curva e, pretendo fazer passar por este ponto uma reta que seja tangente a esta curva. Me diga como posso fazer isso?

Sr. M: – Você pode começar traçando uma reta que passa pelo ponto escolhido e por outro ponto também pertencente à curva. Como sabemos, da geometria euclidiana, dois pontos determinam uma reta de modo único.

Sr. C: – No entanto, uma tal reta, como você acabou de descrever, não será tangente à curva, mas secante!

Sr. M: – Sim, você tem razão! Mas vamos considerar este segundo ponto por onde passa a reta secante como sendo um ponto *móvel*, de modo que possamos aproximá-lo do outro ponto.

Sr. C: – Isso não resolve o problema, pois, por mais próximos que os dois pontos estejam um do outro, a reta que passa pelos dois continuará sendo secante à curva. Por outro lado, caso o ponto móvel coincida com o ponto de tangência, não teremos mais dois pontos, teremos apenas um, e a reta não estará bem determinada. Teremos, em vez disso, um feixe de retas passando pelo ponto da curva. Como saber qual dessas retas é a tangente?

Sr. M: – É verdade, mas estudando as retas secantes que estão próximas da reta tangente, podemos encontrar informações sobre a reta tangente.

Sr. C: – Você está dizendo que é possível determinar *aproximadamente* a posição da reta tangente, considerando uma reta secante muito próxima?

Sr. M: – Não! Estou afirmando que é possível determinar *exatamente* a reta tangente.

Sr. C: – Como, se, usando o seu método, você nunca vai encontrá-la? Tudo que você terá serão aproximações!

Sr. M: – As aproximações de um número fornecem informações sobre esse número. Por exemplo, conhecemos aproximações para o número π. Quanto melhores as aproximações, mais informações temos sobre este número.

Sr. C: – Isto não me convence de modo algum! Sempre haverá um erro... Além do mais, o problema não tem a ver com números, mas com retas.

Sr. M: – Mas este erro *pode ser controlado*! Quanto ao problema de termos retas e não números, isso já foi resolvido pelos senhores Descartes e Fermat: desenhe duas retas perpendiculares no papel, em qualquer posição, orientadas de modo a formarem eixos. Isso vai fazer com que os pontos do papel estejam em correspondência com pares ordenados de números reais. Assim, podemos escolher os eixos de tal modo que a parte da curva que contém o ponto de tangência seja o gráfico de uma função f, de sorte que o ponto de tangência corresponderá a um par ordenado $(a,f(a))$. Além disso, retas podem ser determinadas por sua posição e sua direção; a posição da reta tangente é dada pelo ponto $(a,f(a))$ por onde ela passa, enquanto sua direção é determinada por um número m, chamado *coeficiente angular* da reta. Dessa forma, dentre todos os possíveis valores para m, devemos escolher o único tal que a reta $y - f(a) = m(x - a)$ seja tangente à curva no ponto $(a,f(a))$. As retas secantes que estão próximas da reta tangente têm coeficientes angulares próximos de m...

Sr. C, interrompendo: – Muito sagaz esse processo de transformação de um problema geométrico em um problema aritmético! Então, tudo que se deve fazer é encontrar o número m que corresponda à direção apropriada. Assim, dentre todas as que pertencem ao feixe de retas passando por $(a,f(a))$, a reta que tem este coeficiente angular será a tangente à curva nesse ponto. Mas ainda me incomoda o fato de que se tenha apenas aproximações para m. Você disse que o erro poderia ser controlado. Explique-me melhor isso!

Sr.M: – Um ponto da curva que está próximo a $(a,f(a))$ tem coordenadas $(x,f(x))$. O coeficiente angular da reta (secante à curva) que passa por esses dois pontos, é $m(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Quando x se aproxima de a, o denominador desta fração se aproxima de zero...

Sr. C.: – O que é bastante incoveniente, Sr. M!

Sr. M: – Concordo! Mas, para uma quantidade razoável de curvas, podemos simplificar essa fração. Por exemplo, se a curva for uma parábola, podemos escolher os eixos de modo a que a função correspondente seja $f(x) = x^2$. Logo,

$$m(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

e, quando x se aproxima de a, $x + a$ se aproxima de $2a$.

Sr. C: – Novamente você fala em aproximações! O que garante, neste caso da parábola, que, pelo fato dos coeficientes angulares das retas secantes se aproximarem de $2a$, o coeficiente da reta tangente também será $2a$?

Sr. M: – Este é o ponto crucial do raciocínio: o coeficiente angular é este porque não pode ser outro!

Sr. C, espantado: – Como assim?!

Sr. M: – Para garantir isso, devemos supor mais do que a existência de aproximações para m. Devemos supor que *existem aproximações arbitrariamente precisas* para m. Quando escrevo $\lim_{x\to a} m(x) = m$, estou afirmando justamente isso!

Sr. C: – É uma hipótese bastante forte...

Sr. M: – Mas, felizmente, muitas curvas importantes têm esta propriedade, inclusive a que você desenhou no papel, pois ela é *suave*. Poder calcular o limite que citei é, de fato, a condição que garante a suavidade da curva, ou seja, que ela admite retas tangentes.

Sr. C: – Caso não fosse possível garantir isso, poderíamos ter uma curva aparentemente suave, quando vista "de longe", mas com reentrâncias e irregularidades, quando vista "de perto", não é isso?

Sr. M: – Isso mesmo! Lembre-se de que não estamos lidando com objetos físicos, feitos de matéria, de átomos, mas com objetos abstratos, dos quais podemos nos aproximar indefinidamente.

Sr. C: – Compreendo. Mesmo assim, ainda não aceito que esta hipótese, mesmo muito forte, possa garantir que $m = 2a$.

Sr. M: – Suponha o contrário! Se $m \neq 2a$, então $|m - 2a|$ é um número positivo. Podemos escrever

$$|m-2a| = |m-m(x)+m(x)-2a| \leq |m(x)-m|+|m(x)-2a|.$$

Você conhece esta desigualdade?

Sr. C: – É a desigualdade triangular!

Sr. M: – Exatamente! Agora, tanto m quanto $2a$ são números que permanecem fixados em nosso problema. Logo, $|m-2a|$ é uma constante. À medida em que x se aproxima de a, estamos supondo que $m(x)$ se aproxima de m, e que esta aproximação pode ser tão precisa quanto desejemos. Posso exigir que o erro $|m(x) - m|$ seja menor do que a metade de $|m - 2a|$. Isto porque, quando escrevo $\lim_{x\to a} m(x) = m$, estou dizendo que é possível encontrarmos x tão próximo de a que a desigualde

$$|m(x) - m| < \frac{1}{2}|m - 2a|$$

seja satisfeita. Por outro lado, aquele cálculo que fizemos antes, nos diz que $m(x) = x + a$, e, por isso, podemos escolher x tão próximo de a, que faça

$$|m(x) - 2a| < \frac{1}{2}|m - 2a|.$$

Sr. C: – Não estou entendendo bem aonde você quer chegar...

Sr. M: – Quero mostrar que $m \neq 2a$ é impossível. Para isso, vou mostrar que esta desigualdade gera uma contradição. Já estou quase lá! Veja: acabei de verificar que $|m-2a| \leq |m(x)-m| + |m(x)-2a|$, e que, para uma escolha adequada de x, $|m(x)-m| < \frac{1}{2}|m-2a|$ e $|m(x)-2a| < \frac{1}{2}|m-2a|$. Juntando tudo, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} |m-2a| &\leq |m(x)-m| + |m(x)-2a| \\ &< \frac{1}{2}|m-2a| + \frac{1}{2}|m-2a| \\ &= |m-2a|. \end{aligned}$$

A conclusão é que $|m-2a| < |m-2a|$. Mas, como um número não pode ser estritamente menor do que ele mesmo, isto é uma contradição, que veio de supormos $m \neq 2a$. Portanto, m tem que ser igual a $2a$.

Sr. C: – Estou deveras impressionado, Sr. M. Mas, e o $m(x)$? Achei que ele seria importante.

Sr. M: – E, de fato, ele o é! O número $m(x)$ serve para aproximar, simultaneamente, os dois números que queremos que sejam iguais. Uma vez demonstrada a igualdade, ele sai de cena.

Sr. C: – Então, você demonstrou que dois números são iguais, provando que podem ser aproximados simultaneamente por uma mesma quantidade, e que essa aproximação pode ser arbitrariamente precisa. Por ser arbitrariamente precisa e aproximar ambos os números, ela elimina a possibilidade deles serem distintos. É isso?

Sr. M: – Isso mesmo, Sr. C! Eudoxo de Cnido já fazia isso, à época de Platão! Mas não com estes símbolos!

Sr. C: – Interessante...Imagino o trabalho que o Sr. Eudoxo deve ter tido, sem estes apetrechos algébricos!

3 Uma aplicação

Como obter boas aproximações para uma raiz quadrada não racional, como $\sqrt{2}$? Nesta seção, vamos exibir um método, devido a Sir Isaac Newton (1643–1727), baseado na ideia de que retas tangentes são boas aproximações para os gráficos de funções, pelo menos nas proximidades do ponto de tangência.

Se a é um número real positivo, o gráfico da função dada por $f(x) = x^2 - a$ é uma parábola que corta o eixo das abscissas nos pontos $-\sqrt{a}$ e $\sqrt{a}$.

Seja x_0 uma primeira aproximação para $\sqrt{a}$, que pode ser, por exemplo, o número inteiro mais próximo de $\sqrt{a}$. (Não é difícil encontrar tal número: basta localizar os quadrados perfeitos mais próximos de a: se $n^2 < a < (n+1)^2$, então $n < \sqrt{a} < n+1$ e x_0 é n ou $n+1$. Se a estiver mais próximo de n^2, então $\sqrt{a}$ estará mais próximo de n e $x_0 = n$; do contrário, teremos $x_0 = n + 1$.)

Para obtermos uma segunda aproximação x_1 a partir da primeira (acompanhe o raciocínio na figura a seguir), vamos considerar a reta que tangencia a parábola no ponto $P_0 = (x_0,f(x_0))$. Esta reta tem equação $y - f(x_0) = m(x - x_0)$, onde

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - a - (x_0^2 - a)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0. \end{aligned}$$

Agora, a ideia é *substituir a parábola pela reta tangente.* O número que procuramos, $\sqrt{a}$, corresponde à interseção da parábola com o eixo das abscissas. A aproximação x_1 é a interseção da reta tangente com esse eixo. Para obtermos x_1 em função de x_0, precisamos fazer $y = 0$ na equação da reta tangente, $y - f(x_0) = 2x_0(x - x_0)$:

$$0 - \underbrace{(x_0^2 - a)}_{f(x_0)} = 2x_0(x_1 - x_0).$$

Resolvendo essa equação para x_1, obtemos

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right). \tag{4}$$

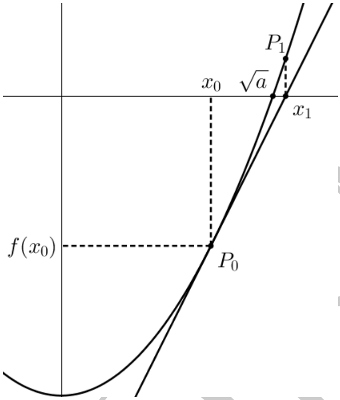

Figura 4: as duas primeiras aproximações para $\sqrt{a}$.

Podemos repetir este procedimento, considerando a reta que tangencia a parábola no ponto $P_1 = (x_1, f(x_1))$. Esta reta tem equação $y - f(x_1) = 2x_1(x - x_1)$. Considerando x_2 como a abscissa do ponto onde esta segunda reta tangente corta o eixo das abscissas, vemos que $0 - f(x_1) = 2x_1(x_2 - x_1)$. O mesmo cálculo que fizemos antes nos leva a concluir que

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right). \tag{5}$$

Podemos assim, construir uma sequência de aproximações $x_0, x_1, x_1, x_2, \ldots$ para $\sqrt{a}$, onde, para cada $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{6}$$

Observação 3. *O algoritmo acima para aproximações de raízes quadradas é conhecido desde a antiguidade, tendo* *sido usado por Heron de Alexandria em seu tratado* $\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\iota\kappa\alpha$ *(Métrica), mas as razões pelas quais o método funciona, ou de onde ele vem, não estão explicadas lá. Provavelmente isso já era conhecido pelos antigos babilônios.*

Da maneira que apresentamos aqui, o método não funciona apenas para aproximar raízes quadradas, mas qualquer número a *que anule uma função* f*, que admite derivada num intervalo contendo* a*.*

O método é muito eficiente. Para raízes quadradas, em cada passo, a quantidade de casas decimais exatas tende a ***duplicar*** *com a repetição das iterações. De fato, suponha que* x_n *aproxima* $\sqrt{a}$ *com* N *casas decimais exatas, de sorte que*

$$|x_n - \sqrt{a}| < 10^{-N}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \sqrt{a}| &= \left|\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a}\right| \\ &= \left|\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n}\right| \\ &= \frac{|x_n - \sqrt{a}|^2}{2x_n} < \frac{10^{-2N}}{2x_n}. \end{aligned}$$

Se $\sqrt{a} > 1$*, podemos supor que* x_n *está suficientemente próximo de* $\sqrt{a}$ *para que* $x_n > 1$*. Neste caso, as estimativas acima garantem que*

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| < 10^{-2N},$$

ou seja, o número de casas decimais exatas duplica. Caso $\sqrt{a} < 1$*, isso essencialmente também ocorre, pois* $1/2x_n$ *tende a ficar estável, enquanto* 10^{-N} *fica pequeno à medida em que repetimos as iterações.*

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em dois encontros de 50 min.

Você pode aproveitar o Exemplo 1 para recordar a relação entre multiplicidade de raízes e tangência, que abordamos na aula *Introdução aos Limites* deste módulo. No Exemplo 2, temos uma curva que, globalmente não é gráfico de uma função, mas, localmente, pode ser considerada como gráfico. Esta é uma ideia importante em geometria.

O fato de que, para certos pontos, temos dois gráficos possíveis tem, neste caso, relação com a possibilidade de termos dois *ramos* de raízes quadradas, ou seja, duas soluções, com sinais contrários, para uma equação do tipo $y^2 = a$. Para certas funções (periódicas, por exemplo) a quantidade de ramos é infinita: por exemplo, se $\cos y = a$, há uma infinidade de possibilidades para y. Estes fatos podem ser sugeridos aos alunos como forma de instigá-los ao estudo da Matemática. Não precisamos falar os detalhes de tudo. Certas idéias são suficientemente ricas, belas e atrativas para convencer os estudantes sobre sua relevância, mesmo que comentadas de modo superficial.

O diálogo da seção 2 é uma tentativa de chamar a atenção para a definição de limite em seu aspecto mais sutil: não se trata apenas de aproximar, mas da garantia de que se pode encontrar aproximações arbitrariamente precisas. A apresentação de textos filosóficos ou científicos em forma de diálogo tem dois expoentes que não podemos deixar de citar: Platão, filósofo ateniense, escreveu muitos clássicos da filosofia (como *A República*) em forma de diálogo, onde o personagem principal era seu mestre, Sócrates. A forma de diálogo também foi adotada por Galileu Galilei (1564–1642), o fundador da ciência moderna. O leitor interessado pode consultar as sugestões de leitura 4, 5 ou 6 e deleitar-se com os diálogos entre Simplício, Sagredo e Salviati.

O texto de Heron de Alexandria, traduzido para o Inglês, pode ser encontrado na sugestão de leitura 3. Lá, você vai encontrar o trecho onde Heron usa o método que exibimos aqui para calcular uma raiz quadrada correspondente à área de um triângulo, aplicando sua famosa fórmula.

As sugestões de leitura 1 e 2 podem ser consultadas para aprofundamento e mais exemplos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, 12^a edição, São Paulo, 2014.

3. Heron de Alexandria. *Métrica, I*, disponível no endereço `https://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/VignettesAncientMath.html`, em Inglês. Consultado em 5 de julho de 2020.

4. Galileu Galilei. *Duas Novas Ciências*, segunda edição. Instituto Cultural Ítalo- brasileiro, São Paulo, 1988.

5. Galileu Galilei. *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano*. Ed. 34, São Paulo, 2011.

6. Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica 1: Mecânica*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2013.