

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivadas de Funções Trigonométricas

Exercícios - Parte III

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Outubro de 2024



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Continuamos apresentando problemas relacionados ao cálculo diferencial de funções trigonométricas, desta feita considerando aplicações à Física e à Geometria.

1 Exemplos

Quando estendemos ou contraímos uma mola, surge uma força atuando no sentido contrário ao do movimento, a qual denominamos *força restauradora*.¹

De acordo com a *lei de Hooke*, se a mola for deslocada, na direção de seu eixo, x metros a partir de sua posição de equilíbrio, de modo a não sofrer deformações permanentes, a força restauradora se calcula (em Newtons) como $F_r = -kx$, sendo $k > 0$ uma constante que depende do material da mola, sendo, por isso, denominada *constante da mola*. Em palavras, *a força restauradora é proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio*.²

Em nosso estudo, a massa das molas é desprezível e não serão consideradas ações de outras forças além da força restauradora.

Dessa forma, suponha que um corpo em movimento de (dimensões desprezíveis e) massa m esteja preso à extremidade livre de uma mola, disposta ao longo do eixo das abscissas³. Então, se $x(t)$ for a posição do corpo no instante t , a segunda lei de Newton permite escrever $mx''(t) = -kx(t)$, ou seja,

¹O exemplo com *molas* serve para ilustrar o fenômeno “*elasticidade de um corpo*”, objeto de estudo da *teoria da elasticidade*. Para ter uma ideia da relevância desse tópico, o leitor pode consultar o artigo “<https://pt.wikipedia.org/wiki/Elasticidade>”, cujo trecho seguinte destacamos: “*O projeto de estruturas na construção civil usa as equações derivadas da teoria da elasticidade para dimensionar colunas, vigas e lajes.*”

²A lei de Hooke também rege o funcionamento dos *dinamômetros*, mecanismos utilizados para medir o resultado de uma força. Dinamômetros podem medir a potência de máquinas e motores, além de serem utilizados como balanças.

³Também podemos supor que, quando não flexionada, a mola tem sua extremidade livre na origem.

$$x''(t) + (k/m)x(t) = 0.$$

Pelo exemplo 5 da aula anterior, a solução dessa EDO é

$$x(t) = x(0) \cos(\sqrt{k/m} \cdot t) + \frac{x'(0)}{\sqrt{k/m}} \operatorname{sen}(\sqrt{k/m} \cdot t). \quad (1)$$

Vejamos uma aplicação da discussão acima.

Exemplo 1. *Em um laboratório de Física, um grupo de estudantes deve realizar um experimento de lançamento de um objeto. Para tal, dispõe-se de uma mola com uma pequena placa de aço, de massa 0,1 kg, acoplada em sua extremidade livre.*

A mola deve ser contraída e o objeto que se pretende lançar deve ser posto no ponto de equilíbrio da mola. Quando liberada, a placa atingirá o objeto, lançando-o a uma distância predeterminada. Fazendo alguns cálculos com ajuda da teoria das colisões, os estudantes concluem que a velocidade ideal de impacto da placa com o corpo é de 18 m/s.

Sabendo que a constante da mola é 90 N/m, calcule o quanto ela deve ser contraída para que o experimento funcione.

Solução. Se a mola for contraída d metros, então, de acordo com (1), em qualquer instante $t \geq 0$ anterior à colisão, a posição $x(t)$ da placa será dada por

$$x(t) = -d \cdot \cos(\sqrt{90/0,1} \cdot t) = -d \cdot \cos 30t.$$

Perceba que a parcela relativa à função seno não ocorre em $x(t)$ pelo fato do sistema estar em repouso em $t = 0$, de sorte que $x'(0) = 0$.

A colisão ocorrerá no primeiro instante t_e em que $x(t_e) = 0$, isto é, $\cos 30t_e = 0$. Daí, $t_e = \pi/60$ e, nesse instante, a placa atinge o objeto com velocidade

$$x'(t_e) = -d(-30 \operatorname{sen} 30t_e) = 30d.$$

Como queremos $x'(t_e) = 18$, a relação $30d = 18$ segue e a resposta é $d = 0,6$ metros. \square

Com auxílio do exemplo 10 da 1ª parte dessa aula, podemos escrever

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$$

para cada real x . Em particular, o erro ao se aproximar (por excesso) $\cos x$ por 1 não ultrapassa $x^2/2$, já que as desigualdades acima se resumem a

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}. \quad (2)$$

O próximo exemplo apresenta estimativas polinomiais relativamente mais precisas da função cosseno.

Exemplo 2. Prove que

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

para todo número real x , sendo as desigualdades estritas para $x \neq 0$.⁴

Solução. Começemos provando que

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad (3)$$

para todo real *positivo* x .

Com efeito, definindo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \cos x,$$

temos

$$f'(x) = \left(-x + \frac{x^3}{3!}\right) + \sin x$$

⁴Tais desigualdades significam que o erro ao se aproximar (por excesso) $\cos x$ por $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ é menor que ou igual a $\frac{x^6}{6!}$. Note que, para $|x| < \sqrt[4]{360} \approx 4,35$, vale $x^6/6! < x^2/2$, de forma que, para tais valores de x , a aproximação da qual trata o exemplo 2 produz erros menores do que aquela comentada inicialmente (2).

e

$$f''(x) = \left(-1 + \frac{x^2}{2!} \right) + \cos x.$$

Pelo exemplo 10 da 1ª parte dessa aula, vemos que $f'' > 0$ em $(0, +\infty)$. Esse fato, aliado às relações $f(0) = f'(0) = 0$, permite, via lema 9 da aula citada, concluir que $f(x) > 0$ em $(0, +\infty)$. Mas isso é precisamente (3).

Como cada membro de (3) é uma função par, essa desigualdade continua válida se $x < 0$. Portanto,

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

com igualdade se, e só se, $x = 0$.

O argumento para provar que

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \quad x \neq 0,$$

é completamente similar. De fato, a regra

$$g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right)$$

define uma função suave $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; daqui, o leitor pode completar o argumento observando que $g(0) = g'(0) = 0$ e $g'' = f > 0$ em $(0, +\infty)$.

□

Exemplo 3. *Um bloco de massa 1 kg está preso à extremidade livre de uma mola de constante $k = 1$ N/m. Em um certo intervalo de tempo, a mola é estendida, com velocidade constante v_0 , e solta, demorando o mesmo intervalo de tempo para retornar à posição de equilíbrio, em um instante no qual o bloco adquire velocidade v_e . Mostre que*

$$\left(\frac{v_e}{v_0} \right)^2 > 5.$$

Solução. Seja $x(t)$ a posição do bloco t segundos após a mola ser solta. Assim, se t_0 segundos foi o tempo total necessário para estender a mola, então, medindo o tempo a partir do instante em que ela foi solta, a hipótese garante que o bloco retorna ao ponto de equilíbrio no instante t_0 , de modo que $x(t_0) = 0$ e $x'(t_0) = v_e$. Além disso, vale $x(0) = v_0 t_0$ e $x'(0) = v_0$.

Com essas informações, a equação (1) dá

$$x(t) = v_0(t_0 \cos t + \sin t).$$

Portanto,

$$x'(t) = v_0(-t_0 \sin t + \cos t),$$

de sorte que

$$\frac{v_e}{v_0} = \frac{x'(t_0)}{v_0} = \cos t_0 + t_0(-\sin t_0).$$

A partir de $x(t_0) = 0$, obtemos $-\sin t_0 = t_0 \cos t_0$. Substituindo essa relação na igualdade acima, segue que

$$\frac{v_e}{v_0} = (1 + t_0^2) \cos t_0. \quad (4)$$

Afirmção 1: $\cos^2 t_0 \cdot (1 + t_0^2) = 1$.

Com efeito, invocando mais uma vez a relação $-\sin t_0 = t_0 \cos t_0$, vem que

$$\begin{aligned} \cos^2 t_0 \cdot (1 + t_0^2) &= \cos^2 t_0 + (t_0 \cos t_0)^2 \\ &= \cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 = 1. \end{aligned}$$

Afirmção 2: $t_0 > 2$.

Observe que $x(t) > 0$ para todo $t \in [0, \pi/2]$. Daí, sendo t_0 a menor raiz positiva da equação $x(t) = 0$, devemos ter $t_0 > \pi/2$. Como

$$x(\pi/2) = v_0 > 0 > -t_0 v_0 = x(\pi),$$

o TVI garante a existência de uma raiz $t' \in (\pi/2, \pi)$ para a equação $x(t) = 0$, de forma que $t_0 \leq t'$ ⁵. Portanto, podemos afirmar que t_0 e 2 são arcos do 2^a quadrante (aberto) $(\pi/2, \pi)$.

⁵Na verdade, $t_0 = t'$, pois x é decrescente, logo injetiva, em $[\pi/2, \pi]$, já que nesse intervalo vale a desigualdade $x' < 0$.

Notando que a função cosseno é decrescente no 2º quadrante, se fosse $t_0 \leq 2$, o exemplo 2 implicaria

$$\cos t_0 \geq \cos 2 > 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} - \frac{2^6}{720} = -\frac{19}{45}.$$

Como $t_0 \in (\pi/2, \pi)$, temos $0 > \cos t_0 > -\frac{19}{45}$. Então, a desigualdade $t_0 \leq 2$, juntamente com a 1ª afirmação, dariam

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{1+t_0^2} = \cos^2 t_0 < \left(\frac{19}{45}\right)^2,$$

gerando a contradição $405 = 45^2/5 < 19^2 = 361$. A 2ª afirmação está, pois, demonstrada.

O desfecho da solução é, agora, uma aplicação imediata de (4) e das afirmações acima:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_e}{v_0}\right)^2 &= (1+t_0^2)^2 \cos^2 t_0 = (1+t_0^2)^2 \cdot \frac{1}{1+t_0^2} \\ &= 1+t_0^2 > 1+2^2 = 5. \end{aligned}$$

□

De acordo com o exemplo 4 da 1ª parte dessa aula, a função seno é estritamente côncava no intervalo $[0, \pi]$. Portanto, pela desigualdade de Jensen ⁶, se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ forem arcos do intervalo $[0, \pi]$, então

$$\frac{\text{sen } \alpha_1 + \dots + \text{sen } \alpha_n}{n} \leq \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right). \quad (5)$$

Além disso, ocorre a igualdade em (5) se, e só se, todos os números α_i forem iguais.

Desse modo, se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ forem os ângulos de um triângulo T , valerá

$$\frac{\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2 + \text{sen } \alpha_3}{3} \leq \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

⁶Vide teorema 13 da aula *Propriedades - Parte III* do módulo *Derivada como Função*.

pois $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$. Portanto,

$$\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad (6)$$

com igualdade se, e só se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/3$, o que equivale a T ser um triângulo equilátero.

Exemplo 4. *O triângulo T tem lados de comprimento a, b, c e o raio do círculo circunscrito a T mede R . Mostre que*

$$a + b + c \leq 3\sqrt{3}R, \quad (7)$$

valendo a igualdade se, e somente se, T for equilátero.

Solução. Digamos que os ângulos opostos aos lados (de medidas) a, b, c meçam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, respectivamente. Pela Lei dos Senos,

$$a = 2R \operatorname{sen} \alpha_1, \quad b = 2R \operatorname{sen} \alpha_2 \quad \text{e} \quad c = 2R \operatorname{sen} \alpha_3.$$

Logo, por (6),

$$\begin{aligned} a + b + c &= (\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_3)2R \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2R = 3\sqrt{3}R, \end{aligned}$$

com igualdade apenas no caso em que T é equilátero. \square

Para reais positivos quaisquer a, b e c , algumas aplicações da desigualdade entre as médias fornecem

$$\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{a + b + c}{9}. \quad (8)$$

Realmente, aplicando a desigualdade para as ternas

$$(a/bc, b/ac, c/ab) \quad \text{e} \quad (a, b, c),$$

vem que

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} &= \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(abc)^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}. \end{aligned}$$

Em seguida, aplicando a mesma desigualdade para a terna (a, b, c) , continuamos a estimativa acima, obtendo

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{\frac{a+b+c}{3}} = \frac{9}{a+b+c}.$$

A partir daí, (8) segue imediatamente.

Suponha, agora, que a , b e c sejam novamente os comprimentos dos lados de um triângulo. Então, (8) e (7) dão

$$\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{a+b+c}{9} \leq \frac{3\sqrt{3}R}{9} = \frac{\sqrt{3}R}{3},$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{abc}{4R} \leq \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{12}.$$

Note que vale a igualdade se, e só se, tivermos igualdade em (8) e (7), isto é, se, e só se, T for equilátero (verifique!).

Observando que $abc/4R$ é a área de T , o argumento acima demonstrou a seguinte

Proposição 5 (Desigualdade de Weitzenböck⁷). *Se a, b, c são os lados de um triângulo de área S , então*

$$S \leq \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{12},$$

com igualdade se, e somente se, o triângulo for equilátero.

Para o último exemplo, precisaremos do seguinte resultado, conhecido como *teorema de Ceva trigonométrico*: se P for um ponto interior ao triângulo ABC , então, nas notações da figura a seguir, vale

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} \beta' \operatorname{sen} \gamma'. \quad (9)$$

⁷Problema 2 da 3ª IMO (1961).

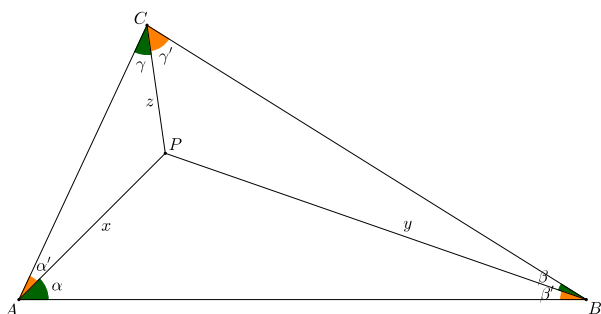


Figura 1: exemplo 6.

Essa relação pode ser provada com ajuda da Lei dos Senos. De fato, sejam $x = \overline{AP}$, $y = \overline{BP}$, $z = \overline{CP}$. No triângulo PAB , temos

$$\frac{x}{\text{sen } \beta'} = \frac{y}{\text{sen } \alpha} \Leftrightarrow x \text{ sen } \alpha = y \text{ sen } \beta'.$$

Analogamente, podemos escrever, em relação aos triângulos PBC, PCA ,

$$y \text{ sen } \beta = z \text{ sen } \gamma' \quad \text{e} \quad z \text{ sen } \gamma = x \text{ sen } \alpha'.$$

Multiplicando essas três igualdades membro a membro, vem que

$$xyz \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma = xyz \text{ sen } \alpha' \text{ sen } \beta' \text{ sen } \gamma',$$

o que, cancelando o fator xyz , fornece (9).

Exemplo 6 (IMO - 1991). *Seja P um ponto interior a um triângulo ABC . Mostre que pelo menos um dos ângulos $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ tem medida menor ou igual a 30° .*

Solução. ⁸ Ainda tomando a figura acima como referência, caso tenhamos $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi/2$, algum dos ângulos α, β ou γ será menor que ou igual a $\pi/6$ (porque?) e a solução estará encerrada.

⁸Baseada na solução apresentada em [1].

Caso contrário, teremos $\alpha + \beta + \gamma > \pi/2$ e, portanto,

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) < \frac{\pi}{2},$$

de sorte que

$$\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} < \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}. \quad (10)$$

Logo, por (9), (5), (10) e pela desigualdade entre as médias, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma &= \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} \beta' \operatorname{sen} \gamma' \\ &\leq \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \beta' + \operatorname{sen} \gamma'}{3} \right)^3 \\ &\leq \operatorname{sen}^3 \left(\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} \right) \\ &< \operatorname{sen}^3(\pi/6) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dessa forma, algum dos números positivos $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{sen} \beta$, $\operatorname{sen} \gamma$ deve ser menor que $1/2$, pois, do contrário, o produto deles seria maior que $1/8$, contradizendo a desigualdade acima. Sem perda de generalidade, suponhamos $\operatorname{sen} \alpha < 1/2$. Como $\alpha \in (0, \pi)$, a desigualdade anterior implica $\alpha < \pi/6$ ou $\alpha > 5\pi/6$ ⁹. No primeiro caso, o ângulo $\angle PAB$ tem medida menor que 30° ; no segundo, levando em conta que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, vale $\beta + \gamma < \pi/6$, de modo que $\angle PBC$ e $\angle PCA$ têm medidas menores que 30° . \square

Dicas para o Professor

Na solução do exemplo 3, a estimativa da quantidade $(v_e/v_0)^2$ dependeu de uma aproximação por falta do instante t_0 de retorno do bloco à posição de equilíbrio. Como $t_0 = -\operatorname{tg} t_0 \in (\pi/2, \pi)$, podemos utilizar o software *GeoGebra* para

⁹Observe que ângulos de medidas $\pi/6$ e $5\pi/6$ radianos equivalem a 30° e 150° , respectivamente.

obter $t_0 \approx 2,028$, com três casas decimais exatas. Assim, o erro da aproximação utilizada no texto, $t_0 \approx 2$, é menor que três centésimos.

As aproximações polinomiais da função cosseno expostas até aqui podem ser generalizadas do seguinte modo: para cada inteiro $n \geq 0$, pondo $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, tem-se

$$P_{4n+2}(x) \leq \cos x \leq P_{4n}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, a igualdade ocorre em qualquer uma dessas desigualdades se, e só se, $x = 0$.

Pode ser instrutivo convidar os alunos a demonstrar essas desigualdades por indução matemática, utilizando a mesma técnica explorada na solução do exemplo 2.

A próxima figura mostra como os gráficos das funções polinomiais P_{2n} , para $1 \leq n \leq 4$, vão se moldando, em torno da origem, ao gráfico da função cosseno¹⁰.

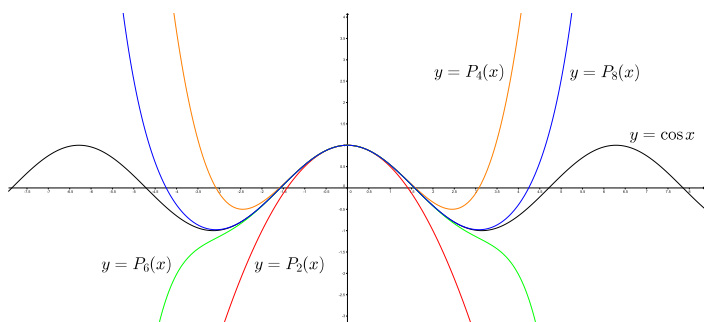
Na linguagem da *Teoria de Séries*, as desigualdades acima permitem, para cada número real x , expressar $\cos x$ como uma soma infinita, a saber,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (11)$$

Para a função seno, temos

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (12)$$

¹⁰Na literatura, P_{2n} é chamado *polinômio de Taylor de ordem $2n$, em torno da origem*, da função cosseno. Há um estudo geral de polinômios de Taylor para funções elementares, que pode ser encontrado em diversos livros de Cálculo/Análise. Em resumo, se f é uma função n vezes derivável em a , o *polinômio de Taylor de ordem n , em torno de a* , de f é o único polinômio de grau $\leq n$ cujas derivadas no ponto a , até ordem n (inclusive), coincidem com as respectivas derivadas de f em a . Para $n = 1$, tal polinômio nada mais é que a função afim cujo gráfico é a reta tangente (ao gráfico) de f em $(a, f(a))$. A exemplo do que ocorre com a função cosseno, em torno da origem, a sequência de polinômios de Taylor de f em torno de a tende a produzir aproximações polinomiais cada vez melhores de f , numa vizinhança fixada do ponto a . Para o leitor interessado, já familiarizado com o conteúdo de séries de números reais, bem como o teorema do valor médio, recomendamos a leitura da seção 5.3 da referência [2].



Estamos aqui, caro leitor, diante da possibilidade de oferecer a definição mais rigorosa, porém desprovida de significado geométrico, das funções \cos e \sin : são as funções reais de uma variável real cujas regras se expressam por (11) e (12), respectivamente. Nessa abordagem¹¹, todas as propriedades (funcionais) das funções trigonométricas seguem, em última análise, apenas das relações (11) e (12).

Se p é o semiperímetro de um triângulo ABC cujo raio da circunferência inscrita é r , então $p \geq 3\sqrt{3}r$, com igualdade se, e só se, ABC for equilátero. Essa desigualdade foi provada na aula *Propriedade Geral* do módulo *Determinantes como Áreas - Parte II*. Assim, pelo exemplo 7, segue que

$$3\sqrt{3}R \geq 2p \geq 2 \cdot 3\sqrt{3}r,$$

logo,

$$R \geq 2r.$$

Essa é a *desigualdade de Euler*: em qualquer triângulo, o raio da circunferência circunscrita é pelo menos o dobro do raio da circunferência inscrita, ocorrendo a igualdade se, e somente se, o triângulo for equilátero.

Duas ou três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

¹¹Confira a seção 12.4 da referência [3].

Sugestões de Leitura Complementar

1. Titu Andreescu, Zuming Feng. *103 Trigonometry Problems*. Birkhäuser, 2005.
2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.
3. E. L. Lima. *Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável*. 13^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

Portal OBMEP