Material Teórico - Módulo Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Quantidade de raízes e consequências

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de junho de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Quantidade de raízes e consequências

Uma função $p(x)$ que satisfaz $p(x) = 0$ para todo x em seu domínio é chamada de identicamente nula.

Exemplo 1. *Se $p(x) = 0x^n + \ldots + 0x + 0$, então, obviamente, $p(x) = 0$ para todo número complexo x. Equivalentemente, se $p(x)$ não é identicamente nulo, então $p(x)$ possui pelo menos um coeficiente diferente de zero.*

Observação 2. *Cuidado: ao escrever $p(x) = 0x^n + \ldots + 0x + 0$, o inteiro positivo n* não *é o grau de $p(x)$. Realmente, para que o grau seja n, precisamos, , além de n ser o maior expoente de x na expressão de $p(x)$, que o coeficiente de x^n seja diferente de* 0*.* Assim, o polinômio identicamente nulo não possui grau *e o exemplo acima diz que, para todos os outros polinômios, o conceito de grau está bem definido.*

A seguir, retomamos uma discussão iniciada na aula "Teorema do Resto" (Aula 4 deste módulo). Caso necessário, reveja tal aula. Vamos precisar usar o Teorema de D'Alembert: se c é uma raiz de $p(x)$, então $p(x) = (x - c)q(x)$ para algum polinômio $q(x)$.

Teorema 3. *Seja $p(x)$ uma função polinomial complexa* não identicamente nula *de grau n. Então $p(x)$ tem, no máximo, n raízes complexas distintas.*

Solução. Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_k$, raízes distintas de $p(x)$. Queremos demonstrar que $k \leq n$.

Pelo Teorema de D'Alembert, como $p(r_1) = 0$, podemos escrever

$$p(x) = (x - r_1)\, q_1(x).$$

Como $p(r_2) = 0$ e $r_1 \neq r_2$, segue que $r_2 - r_1 \neq 0$ e, portanto, $q_1(r_2) = 0$. Novamente pelo Teorema de D'Alembert, temos $q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$, logo,

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)\, q_2(x).$$

Procedendo analogamente para r_3, temos $p(r_3) = 0$, $r_3 - r_1 \neq 0$ e $r_3 - r_2 \neq 0$. Isto implica que $q_2(r_3) = 0$ e, novamente por D'Alembert,

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\, q_3(x).$$

Continuando desta forma para $r_4, \ldots, r_k$, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_k)\, q_k(x). \tag{1}$$

Note que, como $p(x)$ não é identicamente nulo, então $q_k(x)$ também não o é. Sendo esse o caso, $q_k(x)$ tem um grau, que chamaremos ℓ. Como $(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_k)$ tem grau k, se expandirmos o lado direito da igualdade acima, obteremos um polinômio de grau $k + \ell$. Logo, $n = k + \ell$. Por fim, como $\ell \geq 0$, concluímos que $k \leq n$, como queríamos demonstrar. $\square$

No teorema anterior é crucial que $p(x)$ não seja identicamente nulo. De fato, quando $p(x)$ é identicamente nulo, todo número complexo é raiz de $p(x)$; portanto, $p(x)$ tem infinitas raízes e, além de não ser possível definir o grau de $p(x)$, tampouco é possível limitar o número de raízes por qualquer valor.

Um consequência do Teorema 3 é a recíproca do Exemplo 1.

Exemplo 4. *Polinômios que possuem pelo menos um coeficiente diferente de zero não podem ser identicamente nulos. De forma equivalente, se $p(x)$ é identicamente nulo, então todos os coeficientes de $p(x)$ precisam ser iguais a zero.*

Prova. De fato, se $p(x)$ é identicamente nulo, então $p(x)$ possui infinitas raízes reais distintas. Assim, para qualquer n natural, o grau de $p(x)$ não pode ser igual a n, já que $p(x)$ possui mais do que n raízes. A única maneira disto acontecer é se todos os coeficientes de $p(x)$ forem iguais a zero. $\square$

Agora, suponha que $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, mas não sabemos se a_n é nulo ou não (ou seja, sabemos que temos em mãos um polinômio que tem grau no máximo n ou é identicamente nulo). Se, adicionalmente, soubermos que $p(x)$ possui pelo menos $n+1$ raízes distintas, então fica descartada a possibilidade de $p(x)$ ter grau menor ou igual a n, de sorte que $p(x)$ é identicamente nulo. O próximo resultado é uma consequência dessa discussão.

Teorema 5. *Sejam p e q funções polinomiais complexas. Vale que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$ se, e somente se, p e q têm os mesmos coeficientes.*

Solução. [IDA] Considere $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Se um dos polinômios p ou q for identicamente nulo, o outro também precisa sê-lo. Caso contrário, seja n o máximo entre os graus de $p(x)$ e $q(x)$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ q(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

(Veja que não estamos exigindo que a_n e b_n sejam ambos não nulos, mas que pelo menos um deles o seja; assim não estamos assumindo *a priori* que os graus de p e q sejam iguais.)

Se $d(x) := p(x) - q(x)$, então

$$d(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Veja que a condição do enunciado equivale a $d(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$, ou seja, $d(x)$ é identicamente nulo. Logo, todos os seus coeficientes são iguais a zero e, a partir daí,

$$\begin{cases} a_n - b_n = 0 \\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ a_1 - b_1 = 0 \\ a_0 - b_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}.$$

Assim, $p(x)$ e $q(x)$ possuem os mesmos coeficientes.

[VOLTA] Reciprocamente, se $p(x)$ e $q(x)$ possuem os mesmos coeficientes, então é claro que $p(x) = q(x)$ para todo número complexo x. $\square$

2 Uma prova alternativa para o método de Briot-Ruffini

Na aula anterior, estudamos o dispositivo de Briot-Ruffini e apresentamos algumas justificativas de porque ele funciona. Nesta seção, vamos usar o Teorema 3 para fornecer mais uma demonstração dessa validade.

Sejam $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ e $g(x) = x - a$ funções polinomiais dadas. Ao dividir $f(x)$ por $g(x)$, o algoritmo da divisão nos fornece um polinômio quociente, $q(x)$, de grau $n-1$ e um resto constante, $r \in \mathbb{C}$, tais que:

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r.$$

Lembre-se de que o dispositivo de Briot-Ruffini serve para calcularmos os coeficientes de $q(x)$ e o valor de r. Algebricamente, isso pode ser feito escrevendo

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_1 x + q_0,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\, q(x) + r \\ &= (x-a)(q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_1 x + q_0) + r. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva à ultima expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x(q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_1 x + q_0) \\ &\quad - a(q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0) + r \\ &= q_{n-1}x^n + q_{n-2}x^{n-1} + \ldots + q_1 x^2 + q_0 x \\ &\quad - a q_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a q_2 x^2 - a q_1 x - a q_0 + r \\ &= q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - a q_{n-1})x^{n-1} + \ldots \\ &\quad + (q_1 - a q_2)x^2 + (q_0 - a q_1)x + (-a q_0 + r). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3, segue que os coeficientes de $f(x)$ são os mesmos que os da última expressão acima. Portanto:

$$\begin{cases} a_n = q_{n-1}, \\ a_{n-1} = q_{n-2} - aq_{n-1}, \\ \vdots \\ a_2 = q_1 - aq_2, \\ a_1 = q_0 - aq_1, \\ a_0 = -aq_0 + r. \end{cases} \implies \begin{cases} q_{n-1} = a_n, \\ q_{n-2} = a_{n-1} + aq_{n-1}, \\ \vdots \\ q_0 = a_1 + aq_1, \\ r = a_0 + aq_0. \end{cases}$$

Calcular os valores de $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_1, q_0, r$ na ordem indicada pelo pelas equações à direita é exatamente o mesmo que aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini.

3 Multiplicidade das raízes

A prova do Teorema 3 é elementar, sendo consequência apenas do Teorema de D'Alembert que, por sua vez, é consequência do algoritmo da divisão. Por outro lado, conforme já comentamos na Aula 4, algo bem mais difícil de justificar é o:

> **Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)**: todo polinômio de coeficientes complexos e grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Aqui, vamos assumir o TFA como verdadeiro; o leitor interessado encontrará uma demonstração na referência [1].

Partindo da igualdade (1), se $q_k(x)$ não for constante, podemos tomar uma raiz complexa sua, digamos r_{k+1}, e dividi-lo por $x - r_{k+1}$, obtendo resto zero. Assim, se $p(x)$ possuir grau n, prosseguimos com o raciocínio acima até chegar à forma fatorada

$$p(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n),$$

na qual c é o coeficiente líder de $p(x)$ e utilizamos exatamente n raízes complexas $r_1, \ldots, r_n$.

Contudo, tais raízes não precisam ser distintas. Assumiremos que dentre elas há k números distintos e que, sem perda da generalidade, tais números são $r_1, \ldots, r_k$. Agrupando em potências as cópias repetidas dos fatores $x - r_i$, para $1 \leq i \leq k$, podemos escrever:

$$p(x) = c(x - r_1)^{t_1}(x - r_2)^{t_2} \ldots (x - r_k)^{t_k},$$

com $t_1 + \ldots + t_k = n$ (uma vez que n é o total de fatores que tínhamos originalmente) e cada um dos números $t_1, \ldots, t_k$ um inteiro maior ou igual a 1. Para cara $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, o número t_i é chamado de **multiplicidade** da raiz r_i.

A discussão que fizemos até aqui assegura que, levando em consideração as multiplicidades, *todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas* (não necessariamente distintas).

Exemplo 6. *Seja $p(x) = 4\,(x - i)^3(x - 5)^2(x - 10)(x + 7)^2$. Esse polinômio possui quatro raízes distintas, a saber i, 5, 10 e -7. A raiz i possui multiplicidade 3, a raiz 5 possui multiplicidade 2, a raiz 10 possui multiplicidade 1 e a raiz -7 possui multiplicidade 2. A soma das multiplicidades é igual a $3 + 2 + 1 + 2 = 8$. Assim, o polinômio $p(x)$ possui grau 8.*

Exemplo 7. *Qual a multiplicidade da raiz 2 no polinômio $P(x) = x^5 - 8x^4 + 21x^3 - 14x^2 - 20x + 24$?*

Solução. Vamos dividir $P(x)$ por $x - 2$ usando Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 1 & -8 & 21 & -14 & -20 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 4 & -12 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}.$$

Isso nos diz que

$$p(x) = (x - 2)(x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12).$$

Para saber se 2 é uma *raiz dupla*, ou seja, de multiplicidade pelo menos 2, vamos dividir $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$ por $x - 2$, novamente utilizando Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & -6 & 9 & 4 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}.$$

Como o resto continua sendo zero, temos

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 = (x-2)(x^3 - 4x^2 + x + 6),$$

logo,

$$p(x) = (x-2)^2(x^3 - 4x^2 + x + 6).$$

A fim de saber se 2 é uma *raiz tripla*, ou seja, de multiplicidade pelo menos 3, vamos dividir $x^3 - 4x^2 + x + 6$ por $x - 2$. Assim fazendo, obtemos

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array},$$

de modo que

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2x - 3).$$

Então,

$$p(x) = (x-2)^3(x^2 - 2x - 3).$$

Por fim, observe que 2 não é raiz $x^2 - 2x - 3$. Isso pode ser verificado por substituição direta, mas vamos continuar usando Briot-Ruffini, para ilustrar um caso em que o valor testado não é raiz.

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & \boxed{-3} \end{array}.$$

Veja que obtivemos resto -3, ou seja, diferente de zero. Logo $x - 2$ não é fator de $x^2 - 2x - 3$ e, por conseguinte, 2 não é raiz quádrupla de $p(x)$.

Assim, concluímos que a raiz 2 possui multiplicidade igual a três em $p(x)$. $\square$

Observação 8. *Aplicações sucessivas de Briot-Ruffini podem ser executadas em uma única tabela, sem a necessidade de repetir todo o quociente em um dispositivo separado. Isso torna a solução acima bem mais compacta. Fazemos isso a seguir, com os mesmos números da solução do exemplo* *anterior. Note que, na coluna da esquerda, indicamos o candidato a raiz que estamos testando (nesse caso, sempre o número 2). Também, em cada linha circulamos o resto obtido, o qual corresponde aos restos das divisões dos sucessivos polinômios-quocientes por $x - 2$.*

2	1	-8	21	-14	-20	24
2	1	-6	9	4	-12	0
2	1	-4	1	6	0	
2	1	-2	-3	0		
2	1	0	-3			

Evidentemente, o método permite continuarmos testando raízes diferentes, desde que todos os restos obtidos até então sejam iguais a zero. Mais precisamente, uma vez obtido um resto diferente de zero, descartamos a linha em que tal resto apareceu e prosseguimos com Briot-Ruffini, testando o novo candidato a raiz a partir dos coeficientes da linha anterior, isto é, a última linha em que o resto foi zero.

Para o próximo exemplo, uma abordagem distinta de Briot-Ruffini é mais interessante.

Exemplo 9. *Qual a multiplicidade da raiz 1 no polinômio $P(x) = (x^3 - x^2 + x - 1)^{20}$?*

Solução. Seja $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. É fácil testar que

$$q(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0.$$

Dividindo $q(x)$ por $x - 1$ obtemos:

$$q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

e, claramente, 1 não é raiz de $x^2 + 1$.

Dessa forma,

$$p(x) = q(x)^{20} = (x - 1)^{20}\,(x^2 + 1)^{20},$$

em que 1 não é raiz de $(x^2+1)^{20}$. Portanto, 1 possui multiplicidade 20 em $p(x)$. □

Observação 10. *Ainda em relação ao exemplo anterior, a equação $x^2+1=0$ não possui raiz real, mas possui i e $-i$ como raízes complexas. Assim, $x^2+1=(x-i)(x+i)$ e, daí,*

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)^{20}\big((x-i)(x+i)\big)^{20} \\ &= (x-1)^{20}\,(x-i)^{20}\,(x+i)^{20}. \end{aligned}$$

Concluímos que $p(x)$ possui três raízes distintas, 1, i e $-i$, cada uma delas com multiplicidade 20*.*

4 Funções polinomiais versus polinômios (aprofundamento opcional)

Também é possível (e, em contextos mais profundos, útil) considerar funções polinomiais cujos domínio e contradomínio não coincidem com o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Por exemplo, se

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

for um polinômio de coeficientes inteiros e para cada inteiro m estivermos interessados somente na informação sobre a *paridade* de $p(m)$, podemos ver p como uma função

$$\tilde{p} : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0{,}1\},$$

tal que

$$\tilde{p}(m) = \begin{cases} 0, & \text{se } p(m) \text{ for par} \\ 1, & \text{se } p(m) \text{ for ímpar} \end{cases}.$$

Nesse caso, pode muito bem ocorrer de um polinômio ser não nulo mas a função correspondente ser identicamente nula. Especificamente na situação descrita acima, se $p(x)=x^2-x$, então, para $m\in\mathbb{Z}$, temos que

$$p(m) = m^2 - m = m(m-1)$$

é par, uma vez que m ou $m-1$ é par. Assim,

$$\tilde{p}(m) = 0, \ \forall \, m \in \mathbb{Z}$$

e, apesar de $p(x)$ não ser o polinômio nulo (uma vez que tem coeficientes não nulos), a função $\tilde{p}$ (que ainda merece ser chamada de *polinomial*) é identicamente nula.

Graças a situações como essa, em estudos mais aprofundados é conveniente fazer uma distinção entre “função polinomial” e “polinômio”.

Por outro lado, se considerarmos polinômios (de coeficientes complexos) como funções polinomiais de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, tal distinção é irrelevante.

Em todo caso, para instigar a curiosidade do leitor que chegou até aqui, delinearemos, a seguir, como fazê-la, pelo menos para polinômios de coeficientes complexos e funções polinomiais complexas. Para contextos mais gerais e algumas aplicações interessantes, veja a referência [1].

Definição 11. *Chama-se **polinômio** (complexo) a uma **expressão formal** do tipo*

$$a_n X^n + n - 1 X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

*em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são números complexos e X é a **indeterminada**.*

Do ponto de vista da definição acima, um polinômio é uma mera expressão algébrica e, dessa forma, não uma função. Tal expressão pode ser manipulada seguindo regras específicas para realização de soma, subtração, produto e divisão, conforme estudamos nas aulas anteriores, mas sem o intuito de substituir a indeterminada X por valores numéricos.

Uma função, por sua vez, é uma regra que atribui, a elementos de um conjunto — o domínio —, elementos de outro conjunto — o contradomínio.

Definição 12. *Uma **função polinomial** (complexa) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função tal que, para cada $x \in \mathbb{C}$, a imagem $f(x)$ é obtida substituindo o valor de x na expressão algébrica de um polinômio (um mesmo polinômio para todos valores do domínio).*

O Teorema 5 garante que duas funções polinomiais $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a igualdade $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$ precisam ter sido geradas pelo mesmo polinômio. Consequentemente, temos o seguinte resultado.

Teorema 13. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos polinômios complexos,* $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$*, e o conjunto das funções polinomiais complexas,* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.

Por conta do teorema acima, polinômios complexos e funções polinomiais complexas costumam ser tratados como um mesmo objeto.

Dicas para o Professor

Sugerimos que conteúdo deste material seja coberto em dois encontros de 50 minutos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.