Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivada como Função

Propriedades - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

08 de Outubro de 2023

1 As regras da derivada do produto e da derivada do quociente

Completando o conjunto de regras aritméticas para a derivada, apresentamos as fórmulas da derivada do produto/quociente:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \quad ^{1} \tag{1}$$

e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}, \quad \text{se} \quad g(a) \neq 0, \tag{2}$$

sendo $f,g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto $a \in I$. Deixaremos a cargo do leitor reescrever as fórmulas acima na notação de Leibniz.

Assim como nas regras da aula anterior (soma/diferença e múltiplo constante), a leitura completa das fórmulas acima inclui a diferenciabilidade (em a) das funções ocorrendo no 1º membro. Por exemplo, em relação à regra do produto, devemos entender que *se $f,g : I \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis no ponto $a \in I$, **o produto $f \cdot g$ também o é**, valendo a fórmula* (1).

Para verificar a regra do produto, basta atentar para a relação

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) \\ &\quad + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}, \end{aligned} \tag{3}$$

válida para cada $x \in I \setminus \{a\}$. Como g é derivável em a, segue do teorema 2 da aula anterior que g é contínua no ponto a. Portanto, quando se faz $x \to a$, o 2º membro da igualdade (3) tende a $f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$, estabelecendo (a diferenciabilidade de $f \cdot g$ em a e) a regra (1).

Quanto à regra do quociente, sua demonstração foi, essencialmente, produzida na décima página da aula *Funções Racionais* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*.

[1] Essa fórmula é conhecida como *regra de Leibniz*.

Exemplo 1. *Calcule a derivada do polinômio*

$$p(x) = (x^3 - x + 1)(x^2 - 1)$$

de dois modos: primeiro, multiplicando os fatores no 2º membro para, então, calcular a derivada; segundo, usando a regra do produto.

Solução. Multiplicando $x^3 - x + 1$ por $x^2 - 1$, obtemos $p(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1$, de onde se vê que

$$p'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2x + 1.$$

Por outro lado, a regra do produto (1), aplicada à expressão que define p, dá

$$\begin{aligned} p'(x) &= (3x^2 - 1)(x^2 - 1) + (x^3 - x + 1)(2x) \\ &= (3x^4 - 4x^2 + 1) + (2x^4 - 2x^2 + 2x) \\ &= 5x^4 - 6x^2 + 2x + 1, \end{aligned}$$

concordando, como esperado, com o resultado anterior. □

Exemplo 2. *Sejam P um polinômio e a um número real. Mostre que P é divísivel por $(x-a)^2$ se, e somente se, $P(a) = P'(a) = 0$.*

Solução. Se P é divisível por $(x - a)^2$, vale

$$P(x) = (x - a)^2 Q(x),$$

para um certo polinômio Q. Em particular, $P(a) = 0$. Observando que $\frac{d[(x-a)^2]}{dx} = 2(x - a)$, a regra do produto dá

$$\begin{aligned} P'(x) &= [2(x - a)] \cdot Q(x) + (x - a)^2 \cdot Q'(x) \\ &= (x - a)[2Q(x) + (x - a)Q'(x)], \end{aligned}$$

de onde se vê que $P'(a) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos $P(a) = P'(a) = 0$. Pelo teorema de D'Alembert (vide teorema 2 da aula *Funções Racionais* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*), P é divisível por

$(x-a)$, digamos $P(x) = (x-a)R(x)$, sendo R um polinômio. Novamente pela regra do produto, vem que

$$P'(x) = R(x) + (x-a)R'(x),$$

de modo que $0 = P'(a) = R(a)$. Logo, R é divisível por $(x-a)$ e isso implica P divisível por $(x-a)^2$. $\square$

Observação 3. *O exemplo anterior também pode ser resolvido utilizando-se o lema 5 da aula* Reta Tangente - Parte 2, *segundo o qual*

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + Q(x)(x-a)^2,$$

para um certo polinômio Q.

Exemplo 4. *Considere a função $g : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) = \frac{x^k - x}{x+1},$$

sendo k um número natural. Determine o valor de k, sabendo que $g'(1) = 1/2$.

Solução. Pela regra do quociente (2), g é derivável e

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(kx^{k-1} - 1) \cdot (x+1) - (x^k - x) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(kx^k + kx^{k-1} - x - 1) - (x^k - x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(k-1)x^k + kx^{k-1} - 1}{(x+1)^2}, \end{aligned}$$

para cada número real $x \neq -1$. Portanto,

$$\frac{1}{2} = g'(1) = \frac{2k-2}{4} = \frac{k-1}{2} \Rightarrow k = 2.$$

$\square$

Exemplo 5. *A função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a seguinte propriedade: existe $x_0 \neq 0$ tal que a reta passando por $(x_0,f(x_0))$ e pela origem tangencia o gráfico de f no ponto de abscissa x_0. Se $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = f(x)/x$, determine a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(x_0,g(x_0))$.*

Solução. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0. Então, por um lado, a inclinação de t é $f'(x_0)$. Por outro lado, como t passa pela origem, a inclinação de t também é $f(x_0)/x_0$, de modo que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} \Leftrightarrow f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0.$$

Assim, pela regra do quociente (2), temos

$$g'(x_0) = \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{x_0^2} = 0,$$

de onde segue que a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(x_0,g(x_0))$ é horizontal. □

2 A derivada segunda

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável numa vizinhança do ponto $a \in I$, podemos indagar se f' admite derivada em a. Se a resposta for positiva, $(f')'(a)$ (a derivada, calculada em a, da derivada de f) será chamada *2ª derivada* (ou *derivada de ordem 2*) de f em a, sendo denotada por $f''(a)$. Nesse caso, diz-se que f é *duas vezes derivável* no ponto a.

Exemplo 6. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pelas regras*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + 1, \text{ se } x \leq 0 \\ e^x, \quad \text{ se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Então, um cálculo simples mostra que f é derivável e

$$f'(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leq 0 \\ e^x, \quad \text{ se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Daí, segue-se que f é duas vezes derivável em cada número real x, com

$$f''(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \leq 0 \\ e^x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}.$$

$\square$

Se existe $f''(a)$, para cada $a \in I$, f é dita duas vezes derivável. Nessas condições, escrevendo $y = f(x)$, temos que $\frac{d^2y}{dx^2}$ é a notação de Leibniz para a segunda derivada f'', enquanto $f''(a)$ também pode ser indicada como $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=a}$.

Como ilustração, a função do exemplo 6 é duas vezes derivável. Também é duas vezes derivável a cúbica g, definida por $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, em que $g''(x) = 6x - 8$, para cada número real x. Para mais um exemplo, a derivada segunda de $y = b^x$ se expressa como $\frac{d^2y}{dx^2} = (\ln b)^2 b^x$.

Exemplo 7. *É dada a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por partes por*

$$\phi(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ x^2, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Calculando a primeira derivada de ϕ, obtemos

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, \text{ se } x \leq 0 \\ 2x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Portanto, é fácil ver que as derivadas segundas laterais de f [2] *na origem satisfazem*

$$f''_-(0) = -2 \quad e \quad f''_+(0) = 2,$$

mostrando que f não *é duas vezes derivável na origem.* $\square$

A segunda derivada admite uma interpretação cinemática. Antes, vale lembrar que, se $s(t)$ é a posição de uma partícula no instante t, então $s'(t)$, a taxa de variação instantânea da posição com respeito ao tempo, é a velocidade da partícula

[2] Por definição, $f''_-(x) = (f')'_-(x)$ e $f''_+(x) = (f')'_+(x)$.

naquele instante. Do mesmo modo, a taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo, qual seja, a segunda derivada $s''(t)$, é a *aceleração* da partícula no instante t.

Se uma partícula descreve um movimento retilíneo uniforme (MRU), sua aceleração é nula. Reciprocamente, suponha que uma partícula, com função posição $s(t)$, tenha aceleração nula, ou seja, suponha que $s'' \equiv 0$. Isso equivale a afirmar que é identicamente nula a derivada da velocidade s'. Pelo exemplo 15 da aula anterior, s' é, ao mesmo tempo, monónotona não-decrescente e monónotona não-crescente, isto é, s' é constante, digamos, $s'(t) = v$, para cada instante t. Daí,

$$\frac{d[s(t) - vt]}{dt} = \frac{d[s(t)]}{dt} - v = 0,$$

para todo t. Repetindo o argumento anterior, conclui-se que $s(t) - vt = s_0$, para uma certa constante s_0 e para cada instante t, de sorte que $s(t) = s_0 + vt$ e a partícula descreve um MRU.

Com um pouco mais de trabalho, pode-se mostrar que uma partícula em movimento retilíneo tem aceleração constante e não nula se, e somente se, essa partícula descreve um MRUV (movimento retilíneo uniformemente variado).

Exemplo 8. *De acordo com a* $2^{\underline{a}}$ lei de Newton, *a força resultante atuante em um corpo é igual ao produto da massa desse corpo pela sua aceleração. Em símbolos, se uma partícula com função posição $s(t)$ e massa m está sujeita a uma força resultante $F(t)$, então*

$$F(t) = ms''(t),$$

para cada instante t. □

Exemplo 9. *Considere o seguinte movimento unidimensional de uma partícula: $s(t) = \sqrt{a + bt^2}$, em que a e b são constantes positivas. Mostre que, em cada instante, a força resultante que atua na partícula é inversamente proporcional ao cubo de s.*

Solução. Fixado um instante t, calculemos a velocidade da partícula nesse instante [3]:

$$
\begin{aligned}
s'(t) &= \lim_{x\to t}\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a+bt^2}}{x-t}\\
&= \lim_{x\to t}\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a+bt^2}}{x-t}\times\frac{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a+bt^2}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a+bt^2}}\\
&= \lim_{x\to t}\frac{(a+bx^2)-(a+bt^2)}{(x-t)(\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a+bt^2})}\\
&= \lim_{x\to t}\frac{b\cancel{(x-t)}(x+t)}{\cancel{(x-t)}(\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a+bt^2})}\\
&= \lim_{x\to t}\frac{b(x+t)}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a+bt^2}}=\frac{\cancel{2}bt}{\cancel{2}\sqrt{a+bt^2}}=\frac{bt}{s(t)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela regra do quociente,

$$
\begin{aligned}
s''(t)=\frac{bs(t)-bts'(t)}{s(t)^2} &= \frac{bs(t)-bt\cdot\frac{bt}{s(t)}}{s(t)^2}\\
&= \frac{bs(t)^2-b^2t^2}{s(t)^3}\\
&= \frac{b(a+bt^2)-b^2t^2}{s(t)^3}=\frac{ab}{s(t)^3}.
\end{aligned}
$$

Para finalizar, se $F(t)$ é a força resultante no instante t, a 2ª lei de Newton dá

$$F(t)=ms''(t)\Rightarrow F(t)=\frac{mab}{s(t)^3},$$

sendo m a massa da partícula. □

3 Derivadas de ordem superior

As derivadas de ordem superior $f'''(a)$ (3ª derivada de f em a), $\ldots$,$f^{(n)}(a)$ (n-esima derivada de f em a), etc, são definidas

[3]A expressão para $s'(t)$ também segue da observação feita na página 13 da aula *Funções Racionais*, concernente ao cálculo da derivada de uma função do tipo $x\mapsto\sqrt{f(x)}$.

indutivamente, isto é, a k-ésima derivada de f no ponto a é a derivada, no ponto a (caso exista), da $(k-1)$-ésima derivada de f; em símbolos, $f^{(k)}(a) := (f^{(k-1)})'(a)$. [4]

A nomenclatura e a notação se estendem naturalmente. Por exemplo, se f é n vezes derivável, sua n-ésima derivada (ou derivada de ordem n) pode ser denotada por $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n y}{dx^n}$ (na notação de Leibniz). Finalmente, uma função f será dita *suave*, ou *infinitamente derivável*, se f possuir derivadas de todas as ordens em cada ponto do seu domínio.

Exemplo 10. *Funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas são suaves.*[5] □

Exemplo 11. *Determine as três primeiras derivadas da função* $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$g(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Solução. Podemos evitar a regra do quociente escrevendo $g(x) = e^x x^{-1}, x \neq 0$. A partir daí, temos, pela regra do produto,

$$g'(x) = e^x x^{-1} - e^x x^{-2} = e^x(x^{-1} - x^{-2}),$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= e^x(x^{-1} - x^{-2}) + e^x(-x^{-2} + 2x^{-3}) \\ &= e^x(x^{-1} - 2x^{-2} + 2x^{-3}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g'''(x) &= e^x(x^{-1} - 2x^{-2} + 2x^{-3}) + e^x(-x^{-2} + 4x^{-3} - 6x^{-4}) \\ &= e^x(x^{-1} - 3x^{-2} + 6x^{-3} - 6x^{-4}). \end{aligned}$$

□

[4] Por extensão, $f^{(0)} := f$ (*a derivada de ordem* 0 *de uma função é ela própria*).

[5] Como veremos, o mesmo se pode dizer das funções trigonométricas.

Se m é um inteiro não-negativo e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função monômio $f(x) = x^m$, um simples argumento indutivo estabelece as fórmulas abaixo:

$$f^{(j)}(x) = m(m-1)\cdots(m-j+1)x^{m-j}, \quad \text{se } j \le m,$$
$$f^{(j)} \equiv 0, \quad \text{se } j > m.$$

O próximo exemplo registra esse fato de modo um pouco mais geral.

Exemplo 12. *Sejam a um número real, m um inteiro não-negativo e f_m a função polinomial cuja regra é*

$$f_m(x) = (x-a)^m.$$

Se $j \le m$, vale $f_m^{(j)}(x) = m(m-1)\cdots(m-j+1)(x-a)^{m-j}$, enquanto, para $j > m$, temos $f_m^{(j)} \equiv 0$.

Em particular, $f_m^{(m)}(a) = m!$, ao passo que $f_m^{(j)}(a) = 0$ se $j \neq m$. □

Exemplo 13. *Se P é um polinômio de grau n e a é um número real, mostre que*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j. \tag{4}$$

Solução. Primeiramente, note que

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n, \tag{5}$$

para certos números reais a_0,a_1, ... ,a_n, a saber, os coeficientes do polinômio (de grau n) $Q(x) := P(x+a)$. Como $P(x) = Q(x-a)$, a relação $Q(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$ implica a igualdade (5).

Nas notações do exemplo 12, temos

$$P(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m f_m(x),$$

para cada número real x. Além disso, pelas fórmulas daquele exemplo,

$$\begin{aligned} P^{(j)}(a) &= \sum_{m=0}^{n} a_m f_m^{(j)}(a) \\ &= \sum_{j\neq m=0}^{n} a_m f_m^{(j)}(a) + a_j f_j^{(j)}(a) = j!a_j. \end{aligned}$$

Assim, para cada $0 \leq j \leq n$, vale $a_j = P^{(j)}(a)/j!$, o que, de acordo com (5), fornece a relação (4). $\square$

Na aula *Funções Racionais*, do módulo *Leis do Limite - Parte 2*, vimos no corolário 3 que, dados um polinômio não identicamente nulo P é um número real a, existe um único inteiro não negativo k para o qual

$$P(x) = (x-a)^k Q(x),$$

sendo Q um polinômio satisfazendo $Q(a) \neq 0$ [6]. Nesse caso, dizemos que k é a *multiplicidade* de a como raiz de P.

Em geral, se P é um polinômio de grau n e $k \leq n$ é um inteiro não negativo, podemos, pela fórmula (4), escrever

$$P(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + (x-a)^k Q(x),$$

onde

$$Q(x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-k}.$$

Em particular, $Q(a) = P^{(k)}(a)/k!$. Daí, conclui-se que a é raiz de multiplicidade k de P se, e só se, o polinômio

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

[6] Naturalmente, Q é único nessas condições.

é identicamente nulo e $Q(a) \neq 0$, sendo essa última condição equivalente a $P^{(k)}(a) \neq 0$.

O argumento acima estabeleceu o seguinte

Exemplo 14. *O número a é raiz de multiplicidade k do polinômio P se, e só se,*

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0, \quad mas \;\; P^{(k)}(a) \neq 0.$$

□

Em particular, a é raiz de multiplicidade $k \geq 1$ do polinômio P se, e só se, a é raiz de multiplicidade $k-1$ do polinômio derivada P'.

Para acompanhar certos pontos da solução do próximo (e último) exemplo, o leitor pode achar conveniente relembrar alguns fatos da teoria dos polinômios, notadamente o *teorema da decomposição* [7] e as relações de Girard (para cúbicas) [8].

Exemplo 15. *Considere o polinômio de grau 3 a coeficientes racionais*

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Se P admite uma raiz dupla, mostre que todas as raízes de P são racionais.

Prova. Sejam α a raiz dupla e β a outra raiz de P (no conjunto dos números complexos). Pelas relações de Girard, temos

$$\alpha + \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \beta = -\frac{b}{a} - 2\alpha.$$

Sendo racional a primeira parcela no 2º membro da última igualdade, obteremos a conclusão desejada se provarmos que α é racional.

De fato, como α é raiz dupla de P, obtemos $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$; também, α não é raiz dupla de P', de sorte que P' admite duas raízes distintas. Daí, segue que o discriminante

[7] Teorema 2 da aula *Raízes e Multiplicidade* do módulo *Equações Algébricas - Propriedades das Raízes.*

[8] Seção 3 da aula *Relações de Girard* do módulo *Equações Algébricas - Propriedades das Raízes.*

de $P'(x) = 3ax^2+2bx+c$, qual seja, $4b^2-12ac$, é um número não nulo, isto é,

$$2b^2 - 6ac \neq 0. \tag{6}$$

Agora note que o polinômio

$$Q(x) := 3P(x) - xP'(x) = bx^2 + 2cx + 3d$$

ainda admite α como raiz. O mesmo pode ser afirmado em relação ao polinômio

$$R(x) := bP'(x) - 3aQ(x) = (2b^2 - 6ac)x - (9ad - bc).$$

Portanto, $R(\alpha) = 0$ implica

$$(2b^2 - 6ac)\alpha = (9ad - bc),$$

o que, por (6), dá

$$\alpha = \frac{9ad - bc}{2b^2 - 6ac}.$$

Como a,b,c e d são números racionais, concluímos que α também o é. □

Dicas para o Professor

Conforme vimos nas últimas duas seções, as derivadas de ordens superiores de uma função são obtidas iterando-se o cálculo da derivada de 1ª ordem (por definição!). Dessa forma, a k-ésima derivada de expressões como $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g, nas hipóteses adequadas, pode ser calculada com as fórmulas já estudadas para o caso $k = 1$.

De todo modo, enunciamos abaixo como ficam as regras do múltiplo constante, da soma/diferença e do produto para derivadas de ordem k (a regra do quociente, como já se percebe na solução do exemplo 11, reduz-se à regra do produto mediante a observação de que

$$\frac{d[g(x)^n]}{dx} = ng(x)^{n-1}g'(x),$$

para cada inteiro negativo n e para cada função derivável g em x, com $g(x) \neq 0$. Isso pode ser provado por indução, ou obtido como consequência direta da *regra da cadeia*). Há ocasiões em que tais regras são úteis, como na solução do exemplo 13, onde fizemos uso das duas primeiras regras que seguem.

(i) $(c \cdot f)^{(k)}(a) = c \cdot f^{(k)}(a)$.

(ii) $(f \pm g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \pm g^{(k)}(a)$.

(iii) (*Regra de Leibniz generalizada*)

$$(f \cdot g)^{(k)}(a) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}(a) \cdot g^{(k-j)}(a).$$

Obviamente, estamos supondo que $f,g : I \to \mathbb{R}$ são k vezes deriváveis no ponto $a \in I$. Além disso, estão implícitas nas declarações daquelas regras o fato de que $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ (e f/g, se $g(a) \neq 0$) também são k vezes deriváveis em a. Em particular, complementando o exemplo (10), podemos afirmar que, ao submetermos funções suaves às operações aritméticas básicas, obtemos novas funções suaves (em um domínio adequado).

Para efeito de ilustração, a regra

$$f(x) = \frac{2^x - x^2 e^x}{\ln x}$$

define uma função suave $f : (0, +\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$.

As provas das fórmulas acima seguem por indução em k, sendo as demonstrações das regras i) e ii) bem diretas. Já para demonstrar a fórmula de Leibniz generalizada, basta se inspirar na prova indutiva do binômio de Newton.

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.