Material Teórico - Módulo de FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO

Frações e Potenciação - Parte III

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autores: Profs. Bruno Holanda e Ulisses Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

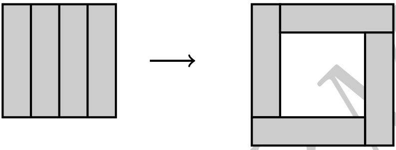
21 de março de 2026

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exemplos

Nesta aula, apresentaremos alguns problemas que são aplicações das propriedades de potenciação de frações estudadas nas aulas anteriores.

Exemplo 1 (OBM). *Um quadrado de área* 1 *foi dividido em* 4 *retângulos congruentes, conforme indicado no desenho à esquerda. Em seguida, os quatro retângulos foram reagrupados de maneira a formar um quadrado, com um buraco quadrado no centro, conforme indica o desenho à direita.*



A área do buraco é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{9}{16}$.

(c) $\frac{16}{25}$.

(d) $\frac{3}{4}$.

(e) 1.

Solução. Como o quadrado original tem área 1, seu lado mede 1. Ele foi dividido em 4 retângulos congruentes verticais, logo, a base de cada retângulo mede $\frac{1}{4}$ e a altura mede 1.

Na segunda figura, os quatro retângulos formam um quadrado maior, com um quadrado branco no centro. Perceba que o lado desse quadrado branco é a diferença entre o comprimento e a largura de um retângulo cinza. Assim, o lado do quadrado branco é $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Desse modo, a sua área é dada pela por

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}.$$

Alternativa correta é a da letra **(b)**. □

Exemplo 2. *Calculando o valor numérico da expressão*

$$\left(\frac{12}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5,$$

obtemos como resposta:

(a) $\frac{1}{5}$.

(b) $\frac{2}{5}$.

(c) $\frac{5}{2}$.

(d) $\frac{1}{2}$.

(e) 1.

Solução. Como todas as potências possuem o mesmo expoente, a propriedade do produto de potências com um mesmo expoente permite que escrevamos

$$\left(\frac{12}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{12}{5} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{2}{5}\right)^5.$$

Agora, vamos simplificar o produto de frações dentro dos parênteses:

$$\begin{aligned}\frac{12}{5} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{2}{5} &= \frac{12 \cdot 25 \cdot 2}{5 \cdot 24 \cdot 5}\\ &= \frac{12 \cdot 2 \cdot 25}{5 \cdot 5 \cdot 24}\\ &= \frac{24 \cdot 25}{25 \cdot 24}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\left(\frac{12}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 = 1^5 = 1.$$

A alternativa correta é a da letra **(e)**. □

Exemplo 3 (OBM). *A metade do número* $2^{11} + 4^8$ *é igual a:*

(a) $2^5 + 4^4$.

(b) $2^5 + 2^8$.

(c) $1^{10} + 2^8$.

(d) $2^{15} + 4^5$.

(e) $2^9 + 4^7$.

Solução. Queremos calcular a metade da expressão dada, o que equivale a dividi-la por 2, ou seja, queremos o resultado da expressão

$$\frac{2^{11} + 4^8}{2}.$$

Inicialmente, vamos colocar as potências na base 2. Como $4 = 2^2$, podemos reescrever 4^8 da seguinte forma

$$4^8 = (2^2)^8 = 2^{2\cdot 8} = 2^{16}.$$

Substituindo esse valor na expressão acima, obtemos

$$\frac{2^{11} + 2^{16}}{2}.$$

Agora, dividimos cada termo por 2 (aplicando a propriedade de divisão de potências de mesma base).

$$\begin{aligned}\frac{2^{11} + 2^{16}}{2} &= \frac{2^{11}}{2^1} + \frac{2^{16}}{2^1}\\ &= 2^{11-1} + 2^{16-1}\\ &= 2^{10} + 2^{15}.\end{aligned}$$

Finalmente, veja que podemos escrever

$$2^{10} + 2^{15} = (2^2)^5 + 2^{15} = 4^5 + 2^{15}.$$

A alternativa correta é a da letra **(d)**. □

Exemplo 4. *Sejam $a = 2^{30}$, $b = 3^{20}$ e $c = 7^{10}$. Qual é o valor da expressão $\frac{bc}{a^2}$, reescrita na forma de uma única potência?*

(a) $\left(\frac{21}{64}\right)^{10}$.

(b) $\left(\frac{63}{32}\right)^{10}$.

(c) $\left(\frac{63}{64}\right)^{10}$.

(d) $\left(\frac{21}{32}\right)^{20}$.

(e) $\left(\frac{63}{64}\right)^{20}$.

Solução. Inicialmente, calculamos o denominador de $\frac{bc}{a^2}$ utilizando a propriedade de potência de potência.

$$a^2 = \left(2^{30}\right)^2 = 2^{30\cdot 2} = 2^{60}.$$

Agora, substituindo b, c e a^2 na expressão original, obtemos

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{3^{20}\cdot 7^{10}}{2^{60}}.$$

Para agrupar as potências, vamos expressar todas elas com o expoente 10:

$$3^{20} = 3^{2\cdot 10} = \left(3^2\right)^{10} = 9^{10};$$

$$2^{60} = 2^{6\cdot 10} = \left(2^6\right)^{10} = 64^{10}.$$

Substituindo na fração, chegamos a

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{9^{10}\cdot 7^{10}}{64^{10}}.$$

Aplicando a propriedade de multiplicação de potências de mesmo expoente no numerador, obtemos

$$9^{10}\cdot 7^{10} = (9\cdot 7)^{10} = 63^{10}.$$

Por fim, concluímos que

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{63^{10}}{64^{10}} = \left(\frac{63}{64}\right)^{10}.$$

A alternativa correta é a da letra **(c)**. □

Exemplo 5. *Qual das seguintes potências representa o maior número?*

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{15} \quad ou \quad \left(\frac{8}{27}\right)^{10}.$$

Solução. Para comparar as frações, vamos reescrevê-las usando a mesma base. Note que $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ e $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Substituindo na primeira potência e aplicando a propriedade de potência de potência, obtemos

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{15} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{15} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot 15} = \left(\frac{2}{3}\right)^{30}.$$

Fazendo o mesmo para a segunda potência, chegamos a

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{10} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot 10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{30}.$$

Como ambas resultam em $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$, os dois números são, em verdade, iguais. $\square$

Exemplo 6. *Encontre o valor numérico da expressão:*

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^3}.$$

Solução. Como todas as bases são potências de $\frac{1}{2}$, podemos mudá-las todas para $\frac{1}{2}$, utilizando a propriedade de potência de potência. De fato, sabemos que

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ \text{ e } \ \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Substituindo essas igualdades nas potências da expressão original, obtemos

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

e

$$\left(\frac{1}{8}\right)^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^9.$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3+4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9}.$$

Mas veja que podemos escrever

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^7}}{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

□

Exemplo 7. *Sejam* $x = \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$ *e* $y = \left(\frac{100}{9}\right)^5$*. Qual é o valor do produto* $x \cdot y$*?*

Solução. Veja que

$$\frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2.$$

Assim, utilizando potência de potência, obtemos

$$y = \left(\frac{100}{9}\right)^5 = \left(\left(\frac{10}{3}\right)^2\right)^5 = \left(\frac{10}{3}\right)^{10}.$$

Portanto, o produto procurado é:

$$x \cdot y = \left(\frac{3}{5}\right)^{10} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{10}.$$

Como os expoentes são iguais, multiplicamos as bases e mantemos o expoente para obter

$$x \cdot y = \left(\frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{10}{\cancel{3}}\right)^{10} = \left(\frac{10}{5}\right)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

□

2 Sugestões ao professor

Esta aula apresenta alguns problemas de competições matemáticas, o que eleva o nível de exigência e abstração. Sugerimos que o professor dê um tempo para que os alunos tentem resolver os problemas por meios próprios antes de apresentar as soluções no quadro. Isso é importante para que os alunos possam consolidar os conceitos aprendidos anteriormente.

Também recomendamos que, ao iniciar as resoluções, o professor faça, a título de revisão, uma rápida listagem das propriedades operatórias das potências.

Nesta etapa, é comum que os problemas exijam um olhar mais atento para encontrar bases ou expoentes comuns. Sugerimos que o professor proponha atividades que ajudem os estudantes a enxergarem essas bases ou expoentes. Por exemplo, o professor pode enfatizar a importância de fatorar números para revelar bases ocultas (mostrando que 4, 8 e 16 são potências de 2).

Duas sessões de 50 minutos devem ser suficientes para apresentar todo o conteúdo deste material, levando em conta o tempo que será dado para que os alunos tentem resolver os problemas.