Material Teórico - Módulo: Função Afim

Noções Básicas - Parte 1

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

6 de Julho de 2025

1 Função afim: definição e propriedades básicas

Em um material anterior (veja o módulo Funções - Noções Básicas - Parte 1, Exemplo 3), vimos que duas grandezas são chamadas *diretamente proporcionais* se a razão entre elas for uma constante, que chamamos **constante de proporcionalidade**. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1. *Quatro amigos foram almoçar em um restaurante de comida por quilo. A tabela a seguir mostra os resultados das pesagens do almoço e o valor pago por cada um. Qual o preço do kg de almoço nesse restaurante?*

"peso" em g	R$
372	16,74
470	21,15
512	23,04
540	24,30

Solução. Dividindo o valor pago pela massa de comida consumida, obtemos o preço de um grama de almoço. Como esse valor é o mesmo para todos os consumidores, devemos ter as seguintes igualdades:

$$\frac{16,74}{372} = \frac{21,15}{470} = \frac{23,04}{512} = \frac{24,30}{540} = a$$

De fato, executando cada uma das divisões acima, obtemos sempre o mesmo valor: $a = 0,045\,\text{R\$}/g$, que é o preço por grama de comida. Uma vez que 1Kg = 1000g, concluímos que o preço por quilograma de comida é esse valor multiplicado por 1000, ou seja, 45 reais. □

Na tabela acima, os valores da segunda coluna podem ser obtidos a partir dos valores da primeira coluna, multiplicando-os por $a = 0,045$. Obtemos, assim, uma *relação de dependência* da forma

$$f(x) = ax, \tag{1}$$

com $a = 0,045$, onde x denota a massa de comida (em gramas) e $f(x)$ o valor pago por ela, em reais.

Claramente, na situação do exemplo apenas valores inteiros positivos de x podem ser considerados. Contudo, se fizermos x variar em $\mathbb{R}$, obteremos a *função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0,045 \cdot x$. Esse tipo de função é suficientemente importante para merecer uma definição que o destaque.

Definição 2. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é dada como em (1), com $a \neq 0$, é chamada **função linear**.*

A escolha do adjetivo *linear* pode ser justificada observando-se o gráfico de f. Na figura 1 podemos ver os pontos $A = (372; 16{,}74), B = (470; 21{,}15), C = (512; 23{,}04)$ e $D = (540; 24{,}30)$. Esses quatro pontos pertencem a uma mesma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

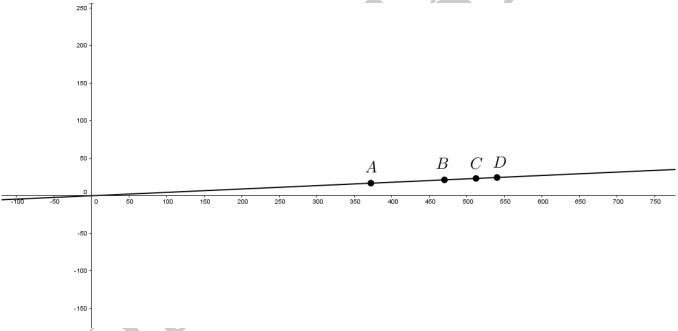

Figura 1: os pontos A, B, C e D são colineares.

Uma função linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

(i) $f(x + x') = f(x) + f(x')$, para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}$.

(ii) Para cada $c \in \mathbb{R}$ constante, tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, se $x, x' \in \mathbb{R}$, então

$$f(x+x') = a(x+x') = ax + ax' = f(x) + f(x'),$$

o que justifica a afirmação (i). Por outro lado, se $c \in \mathbb{R}$, então

$$f(cx) = a(cx) = c(ax) = cf(x),$$

o que justifica a afirmação (ii).

Reciprocamente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição (ii), então

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax,$$

com $a = f(1)$. Em particular, para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a condição (ii) implica a condição (i).

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + b$, onde $b \in \mathbb{R}$ é uma constante, é chamada de *translação*.

Cabe observarmos que, em geral, uma translação *não* é uma função linear, pois, se $c \neq 1$, então

$$f(cx) = cx + b \neq cx + cb = cf(x).$$

O efeito geométrico da translação dada por $f(x) = x + b$ é "mover" um ponto x situado na reta real. Realmente, se $b > 0$, o ponto $f(x)$ está b unidades à direita de x; se $b < 0$, o ponto $f(x)$ está b unidades à esquerda de x; por fim, se $b = 0$, então os pontos $f(x)$ e x coincidem.

Como já vimos no material *Funções - Noções Básicas - Parte 1*, Exemplo 8, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é chamada *função identidade*. Essa é a única função linear que também é uma translação.

A definição a seguir generaliza a classe de funções vistas acima.

Definição 3. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, é chamada de* ***função afim****.*

Toda função linear é uma função afim, com $a \neq 0$ e $b = 0$. Toda translação é uma função afim, com $a = 1$. Se $a = 0$, a função afim pode ser escrita como $f(x) = b$, e a chamamos de **função constante**.

Reciprocamente, toda função afim que não é constante pode ser construída a partir de funções lineares e translações, da seguinte maneira: seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Então $f = T \circ L$, onde $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a translação dada por $T(x) = x + b$ e $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função linear dada por $L(x) = ax$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$(T \circ L)(x) = T(L(x)) = T(ax) = ax + b = f(x).$$

Para o exemplo a seguir, recorde (de acordo com o material *Funções - Noções Básicas - Resolução de Exercícios, Parte 4*, Exemplo 7) que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **involução** se $f(f(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4. *Vamos obter todas as funções afins que são involuções. Para tanto, seja $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e suponhamos que $f(f(x)) = x$, também para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(ax + b) = x$, isto é, $a(ax + b) + b = x$. Dessa igualdade segue que*

$$a^2x + (a + 1)b = x, \tag{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, se $x = 0$, então $(a+1)b = 0$, o que implica $b = 0$ ou $a = -1$. Consideremos, pois, esses dois casos:

(i) *Se $b = 0$,* (2) *pode ser rescrita como $a^2x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = 1$, encontramos $a^2 = 1$ e, daí, $a = 1$ ou $a = -1$. Se $a = 1$, então $f(x) = x$, a função identidade. Se $a = -1$, então $f(x) = -x$.*

(ii) *Se $a = -1$, então* (2) *é trivialmente satisfeita, independentemente do valor de b. Logo, $f(x) = -x + b$.* (*Observe que esse caso, no final das contas, inclui o caso anterior.*)

Sendo A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, uma função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ também é chamada de função afim. Analogamente, repetimos a mesma nomenclatura definida acima para translações, funções lineares etc, no caso de funções $f : A \to \mathbb{R}$. Vejamos um exemplo relevante nesse sentido.

Exemplo 5. *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = an+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma função afim cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Note que f é simplesmente a sequência $(f(1), f(2), f(3)\ldots)$, tal que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma:*

$$f(n+1) - f(n) = a(n+1) + b - (an+b) = a.$$

*Uma sequência desse tipo é chamada de **progressão aritmética** (abrevia-se **PA**) de **razão** a. O termo $f(1) = a + b$ é chamado de **termo inicial** da PA. Denotando $a_n = f(n)$, temos que $a_1 = f(1) = a + b$, isto é, $b = a_1 - a$. Portanto,*

$$a_n = f(n) = an + b = an + a_1 - a,$$

e podemos escrever

$$a_n = a_1 + (n-1)a,$$

*a qual é denominada a **fórmula do termo geral** da PA.*

2 Caracterização de funções afins

Nesta seção, vamos exibir uma propriedade que caracteriza as funções afins. Também veremos que é fácil decidir quando uma função afim é *crescente* ou *decrescente*, de acordo com a definição a seguir.

Definição 6. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **crescente** se o valor de $f(x)$ cresce quando x cresce, ou seja, se para $x, x' \in \mathbb{R}$, tivermos*

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

*Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **decrescente** se o valor de $f(x)$ decresce quando x cresce, ou seja, se para $x, x' \in \mathbb{R}$, tivermos*

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x').$$

Lembremos que, dados $x, x' \in \mathbb{R}$, escrevemos $x < x'$ para indicar que $x' = x + h$, com $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. O número positivo h, que devemos somar a x para obter x', é chamado **incremento**.

O Teorema 7 a seguir caracteriza as funções afins em termos da razão

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{3}$$

onde h é um incremento arbitrário. A razão (3) é chamada **taxa de variação** (**da função f no ponto x, para um incremento h**). Podemos ver a taxa de variação como uma medida da "velocidade" de crescimento de uma função. Em geral, essa taxa de variação depende de x, mas para funções afins ela é constante, como veremos a seguir.

Teorema 7. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.*

(*a*) *f é uma função afim se, e somente se, a taxa de variação*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é constante, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$. Neste caso, temos $f(x) = ax + b$, onde a é o valor constante da taxa de variação e $b = f(0)$.

(*b*) *Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, $a > 0$, e é decrescente se, e somente se, $a < 0$.*

Prova.
(a) Assumindo que f seja uma função afim, podemos escrever $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \\ &= \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} \\ &= \frac{ah}{h} = a.\end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo que a taxa de variação de f seja constante e igual a a, temos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a,$$

para quaiquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$. Em particular, se $x = 0$, obtemos

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = a \Rightarrow f(h) - f(0) = ah.$$

Da mesma forma, temos

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} = a,$$

para todos $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$ (observe que h é o incremento para passarmos de $x - h$ a x). Em particular, para $x = 0$, obtemos

$$\frac{f(0)-f(-h)}{h} = a \Rightarrow f(-h) - f(0) = -ah.$$

Chamando $f(0)$ de b, obtemos $f(h) = ah + b$ e $f(-h) = a(-h) + b$, para todo $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Dessa forma, escrevendo x no lugar de h e $-h$ na lei de formação de f, obtemos $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (veja que tal fórmula vale também quando $x = 0$, uma vez que $f(0) = b$).

(b) Seja $f(x) = ax + b$. Suponhamos que f seja crescente e consideremos $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Então, $x < x + h$ e, por f ser crescente, $f(x) < f(x + h)$, ou seja, $f(x + h) - f(x) > 0$. Assim,

$$a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0,$$

pois o numerador e o denominador dessa fração são positivos.

Reciprocamente, se $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, então

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = a > 0$$

para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}$, onde $x' = x + h$. Se $x < x'$, então $x' - x > 0$ e

$$f(x') - f(x) = a(x' - x) > 0,$$

pois o segundo membro é o produto de dois números positivos. Logo, $f(x) < f(x')$ e, portanto, f é crescente.

A demonstração de que f é decrescente se, e somente se, $a < 0$ é análoga e convidamos você a escrevê-la. $\square$

Observação 8. *Uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem taxa de variação igual a zero se, e somente se, é constante.*

Veremos agora que a composição de funções afins ainda é uma função afim.

Teorema 9. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções afins dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, a composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é uma função afim, dada por*

$$(f \circ g)(x) = acx + (\overbrace{ad + b}^{f(d)}).$$

Além disso, se f e g forem ambas crescentes ou ambas decrescentes, então $f \circ g$ é crescente. Se uma delas for crescente e a outra for decrescente, então $f \circ g$ é decrescente.

Prova. A primeira parte é um cálculo imediato:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(cx + d) \\ &= a(cx + d) + b \\ &= acx + (ad + b).\end{aligned}$$

Observe que $f(d) = ad + b$.

Para a segunda parte, note primeiramente que o Teorema 7 garante que, se f e g forem ambas crescentes ou ambas decrescentes, então a e c têm um mesmo sinal (são ambos positivos ou ambos negativos). Em qualquer caso, temos $ac > 0$, e a fórmula para $(f \circ g)(x)$, juntamente com o Teorema 7, garante que $f \circ g$ é crescente.

Se, por outro lado, uma das funções for crescente e a outra for decrescente, então a e c têm sinais contrários, logo, $ac < 0$ e (novamente pelo Teorema 7) $f \circ g$ é decrescente. $\square$

O exemplo a seguir generaliza o teorema anterior. Deixamos a verificação dos detalhes para você.

Exemplo 10. *Considere as funções $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde, para cada $1 \leq i \leq n$, temos $f_i(x) = a_i x + b_i$, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. A composta $F = f_1 \circ \ldots \circ f_n$, obtida aplicando-se sucessivamente as funções $f_n, \ldots, f_1$, é dada por*

$$F(x) = (a_1 \ldots a_n)x + f_1(f_2(\ldots f_n(b_n) \ldots)),$$

onde $f_1(f_2(\ldots f_n(b_n) \ldots)) = (f_1 \circ \ldots \circ f_n)(b_n)$ é o resultado da aplicação sucessiva das funções $f_n, \ldots, f_1$ ao coeficiente b_n.

Ademais, se, dentre as funções $f_1, \ldots, f_n$ o número de funções decrescentes for par, então o produto $a_1 \ldots a_n$ terá um número par de fatores negativos, sendo, portanto, positivo; assim, a composta $F = f_1 \circ \ldots \circ f_n$ será crescente. Caso o número de funções decrescentes seja ímpar, o produto $a_1 \ldots a_n$ terá um número ímpar de fatores negativos, sendo, portanto, negativo; então, a composta será decrescente.

Dicas para o Professor

Um ou dois encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir este material.

Funções afins são importantes por dois motivos principais: primeiro, seu estudo é relativamente simples e podemos dizer muito sobre uma função afim conhecendo apenas seus coeficientes, ou sua ação em dois elementos distintos do seu domínio. Segundo, é possível estudar funções mais gerais usando funções afins como uma primeira aproximação (essa é a ideia central do Cálculo Diferencial). Evidentemente esse segundo motivo é mais difícil de ser explicado a alunos do ensino básico, que nunca tiveram contato com o Cálculo, mas, conforme veremos na segunda parte do material, alguns exemplos podem ajudar o estudante a compreender a utilidade das funções afins como ferramenta de aproximação.

As referências listadas a seguir discutem funções em geral, e afins em particular. As referências [2] e [3] trazem vários problemas simples envolvendo funções afins, ao passo que a referência [1] estende o estudo de funções até os rudimentos do Cálculo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume 3: Introdução à Análise*, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, volume 1: Conjuntos Numéricos e Funções.* Editora Atual, São Paulo, 2013.

3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio, volume 1.* Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.