Material Teórico - Módulo Cônicas

Exercícios

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Exercícios Resolvidos

Neste último material, resolvemos mais alguns exercícios sobre cônicas, a fim de exercitar os conteúdos vistos nas vídeo-aulas anteriores.

Exemplo 1. *Represente graficamente as regiões do plano representadas pelas seguintes equações:*

(a) $x^2 - 20x + y + 100 \geq 0$.

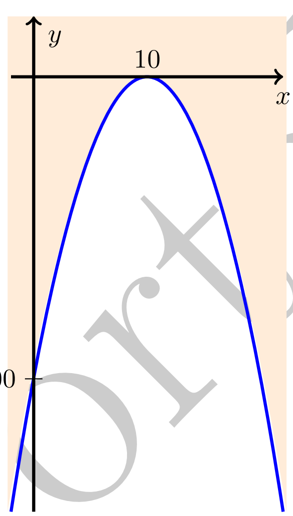
(b) $x^2 - y^2 - 6x \geq 0$.

Solução.
(a) Observe que $x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2$. Sendo assim, a inequação deste item equivale a:

$$(x-10)^2 + y \geq 0.$$

Resolvendo primeiramente o caso em que temos igualdade na inequação acima, obtemos a parábola $y = -(x-10)^2$, que possui concavidade para baixo e cujo vértice é o ponto $(x_0, y_0) = (10, 0)$. A fim de esboçar a parábola, é interessante identificar também o ponto em que ela cruza o eixo-y; fazendo $x = 0$, obtemos $y = -(-10)^2 = -100$. Logo, ela passa pelo ponto $(0, -100)$ (veja a figura abaixo).

Agora, como estamos interessados na região em que a inequação $y \geq -(x-10)^2$ é satisfeita, dado um ponto da parábola se aumentarmos o valor de y ainda iremos satisfazer essa inequação. Sendo assim, a região procurada corresponde à parábola juntamente com a região sombreada (em laranja) da figura.



(b) Considere a inequação $x^2 - y^2 - 6x \geq 0$. Completando quadrados para os termos com a variável x, temos que $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$. Assim, a inequação original é equivalente a

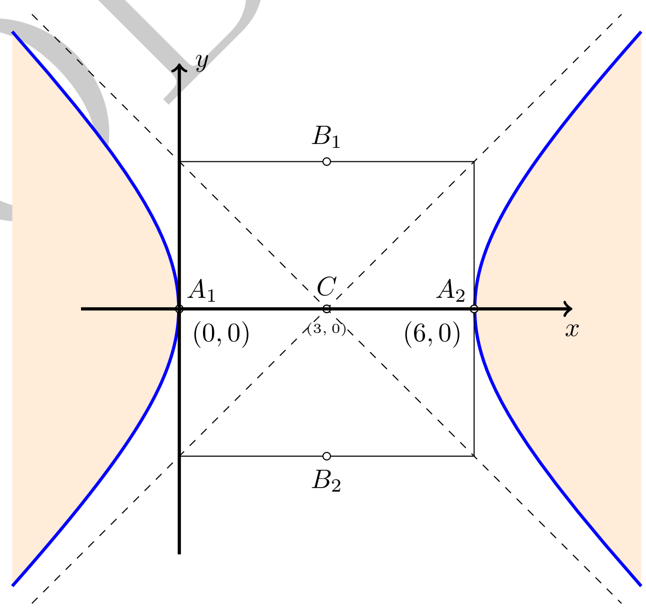
$$(x-3)^2 - y^2 \geq 9,$$

ou ainda, na forma reduzida,

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{9} \geq 1.$$

Como no item (a), analisando primeiro o caso em que temos igualdade, vemos que a curva obtida é uma hipérbole com centro no ponto $C = (3, 0)$ (já que $y^2 = (y-0)^2$) e cujo eixo real coincide com eixo-x. Para desenhar a hipérbole, consideramos os valores a e b dos semieixos real e imaginário, respectivamente. Temos que a e b são positivos e satisfazem $a^2 = 9$ e $b^2 = 9$; sendo assim, $a = 3$ e $b = 3$. Então, desenhamos um retângulo que tem como centro o ponto C e lados de comprimentos $2a$ e $2b$. Lembre-se de que as diagonais desse retângulo (que neste caso será um quadrado de lado 6) estão contidas nas assíntotas da hipérbole (as retas pontilhadas, na figura abaixo).

Por fim, precisamos determinar quais são os pontos (x, y) que satisfazem a inequação original, $y^2 \leq x^2 - 6x$. Veja que para cada ponto que está sobre a hipérbole temos igualdade nessa inequação. Por outro lado, partindo de um desses pontos, precisamos diminuir o valor absoluto de y para que a inequação continue valendo. De fato, para cada (x_1, y_1) pertencente à hiperbole, os pontos do segmento de reta que vai de (x_1, y_1) a $(x_1, -y_1)$ (passando por $(x_1, 0)$) estão na região desejada. Sendo assim, os pontos que satisfazem a inequação correspondem à região sombreada na figura abaixo além da própria hipérbole.



□

Exemplo 2. *Represente a região do plano definida pelos pontos (x, y) que satisfazem (simultaneamente) as duas inequações seguintes:*

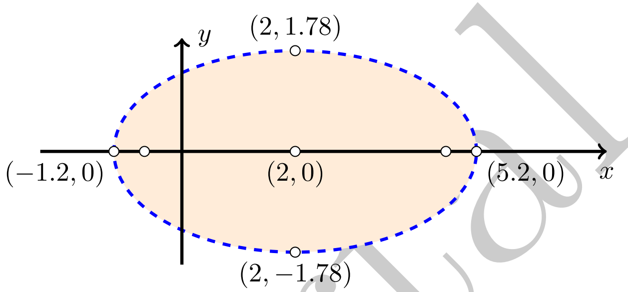
$$\begin{cases} 25x^2 + 81y^2 - 100x < 156, \\ -10x^2 + 6y^2 + 60x < 80. \end{cases}$$

Solução. Como no exemplo anterior, notamos que ambas as regiões possuem uma fronteira delimitada por uma cônica. Neste exemplo, como as inequações são estritas, a fronteira não faz parte da região desejada. Em todo caso, começamos determinando a fronteira para desenhar a região. Para tanto, como antes começamos completando quadrados e reescrevendo as inequações na forma reduzida, para poder classificar as cônicas correspondentes.

Trabalhando a primeira inequação obtemos a seguinte série de inequações equivalentes:

$$\begin{aligned}
25x^2+81y^2-100x &< 156\\
(25x^2-100x)+81y^2 &< 156\\
(25x^2-100x+100)+81y^2 &< 256\\
25(x^2-4x+4)+81y^2 &< 256\\
25(x-2)^2+81y^2 &< 16^2\\
\frac{(x-2)^2}{(16/5)^2}+\frac{y^2}{(16/9)^2} &< 1. \qquad (1)
\end{aligned}$$

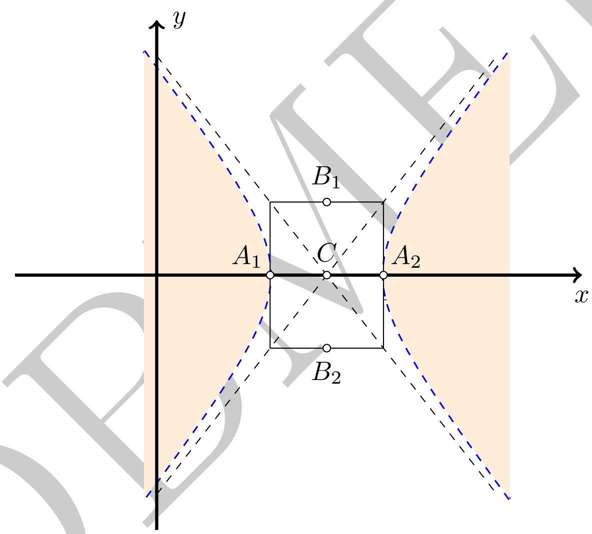
Trocando o sinal de menor por um de igualdade, obtemos uma elipse de centro $C=(2,0)$, com semieixo maior $a=16/5=3{,}2$ e semieixo menor $b=16/9\cong 1{,}78$. Veja que, quando movemos um ponto (x,y) dessa elipse ao longo do segmento que o une ao centro C e para mais próximo de C, pelo menos um dos valores $(x-2)^2$ e y^2 (que são não negativos) diminui, de modo que passa a valer a inequação (1). Sendo assim, os pontos que satisfazem a desigualdade original são aqueles que estão no interior da elipse (veja a figura abaixo). Lembre-se de que os pontos da elipse não fazem parte da região desejada, por isso a desenhamos de forma pontilhada.



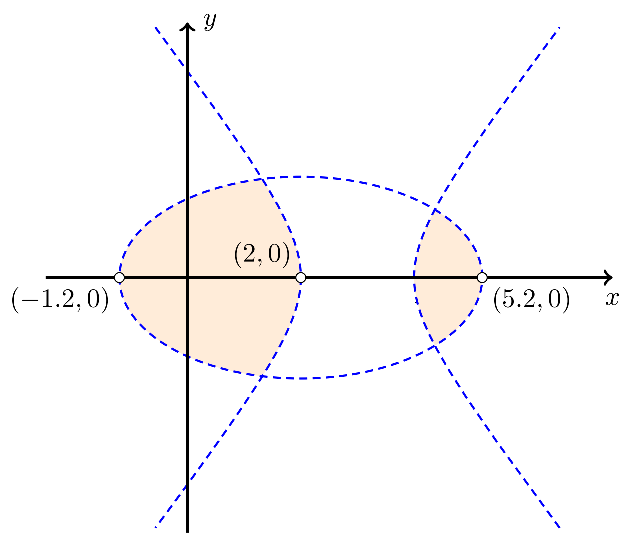
Vamos, agora, fazer a mesma análise para a segunda desigualdade.

$$\begin{aligned}
-10x^2+6y^2+60x &< 80\\
(-10x^2+60x)+6y^2 &< 80\\
x^2-6x-0.6y^2 &> -8\\
(x^2-6x+9)-0.6y^2 &> 1\\
(x-3)^2-0.6y^2 &> 1\\
\frac{(x-3)^2}{1}-\frac{y^2}{10/6} &> 1.
\end{aligned}$$

Observe acima que, na terceira inequação, ao dividir ambos os lados por -10 precisamos inverter o sinal da desigualdade. Veja que, dessa vez, a região em questão está delimitada por uma hipérbole. A reta que contém o eixo real dela coincide com o eixo-x, o centro é o ponto $C=(3,0)$ e os vértices são os pontos $A_1=(2,0)$ e $A_2=(4,0)$ (uma vez que o semieixo real mede 1). De modo análogo ao exemplo anterior, os pontos que satisfazem a inequação são aqueles pertencentes à região sombreada na figura abaixo (de forma que, portanto, a própria hipérbole não está contida nesse conjunto de pontos).

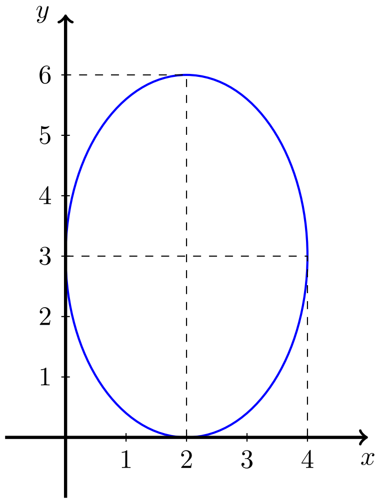


Agora, basta desenhar as duas regiões em um único plano: a interseção das áreas sombreadas corresponde à região dos pontos que satisfazem as duas inequações simultaneamente, e o resultado é indicado na figura abaixo. Observe, por exemplo, que os vértices da hipérbole estão no interior da elipse e o vértice A_1 da hiperbole possui as mesmas coordenadas que o centro C da elipse: $(2,0)$.



□

Exemplo 3 (UNESP-2014, adaptado). *A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados. Encontre as equações reduzida e geral dessa elipse.*



Solução. Como o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo-y, convencionamos que a equação da elipse possui o seguinte formato (note que o termo a^2 está no denominador de $(y-y_0)^2$, e não de $(x-x_0)^2$):

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1.$$

A figura indica que o centro da elipse é o ponto $(x_0, y_0) = (2, 3)$. Além disso, ela nos mostra que o eixo maior tem comprimento 6, de sorte que $2a = 6$, ou seja, $a = 3$. De forma análoga, $2b = 4$ e assim, $b = 2$. Logo, a equação reduzida é:

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1.$$

Para obtermos a equação geral, basta desenvolver todos os termos. De início, multiplicamos ambos os lados por 36 (que é o mínimo múltiplo comum de 4 e 9), para obter:

$$9(x-2)^2+4(y-3)^2=36.$$

Continuando o desenvolvimento expandindo os produtos notáveis $(x-2)^2$ e $(y-3)^2$, obtemos a seguinte sucessão de equações equivalentes:

$$\begin{aligned} 9(x^2-4x+4)+4(y^2-6y+9)&=36,\\ 9x^2-36x+36+4y^2-24y+36&=36,\\ 9x^2+4y^2-36x-24y+36&=0. \end{aligned}$$

A última equação acima é a equação geral da elipse do enunciado. □

Exemplo 4 (FGV-2013). *Sejam m e n os maiores valores reais que as variáveis x e y, respectivamente, podem assumir na equação*

$$(x-2)^2+4(y+5)^2=36.$$

Então, $m+n$ é igual a:

(a) 8.

(b) 7.

(c) 6.

(d) 4.

(e) 3.

Solução. Podemos reescrever a equação do enunciado na forma reduzida da equação de uma cônica. Primeiro, dividimos ambos os lados por 36, para obter:

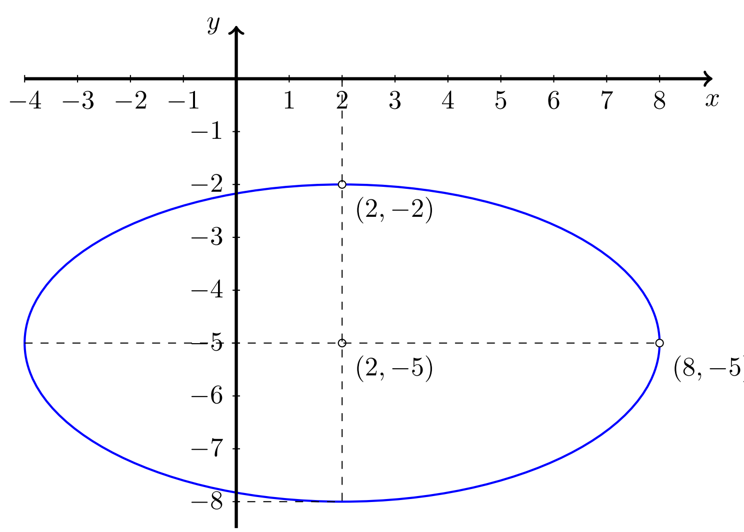
$$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{4(y+5)^2}{36}=1.$$

Em seguida, percebemos que a equação acima equivale a:

$$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-(-5))^2}{9}=1.$$

Esta última é a equação de uma elipse com centro no ponto $(2, -5)$ e na qual $a^2 = 36$ e $b^2 = 9$. Como a e b são positivos, temos $a = 6$ e $b = 3$.

Veja (conforme a figura abaixo) que o maior valor de x ocorre no vértice "mais à direita" da elipse. Como $a = 6$, esse vértice é obtido a partir do centro $(2, -5)$, somando-se 6 à coordenada de x, ou seja, ele é o ponto $(8, -5)$. Sendo assim, o maior valor possível para x é igual 8. De forma semelhante, o maior valor para y ocorre no vértice da elipse que está "mais para cima". Como $b = 3$, as coordenadas desse vértice são $(2, -5 + 3) = (2, -2)$. Assim, o maior valor possível para y é -2. Então, temos que $m = 8$ e $n = -2$, logo, $m + n = 6$. A resposta correta é o item (c).



□

Dicas para o Professor

Este material pode ser apresentado em um encontro de 50 minutos. Lembra-se de que há outros exercícios no Portal e nas referências bibliográficas reunidas abaixo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria.* Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 7: Geometria analítica.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.