

# **Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares**

## **Lei dos Senos e Lei dos Cossenos - Parte 2**

**Nono Ano**

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente  
Revisor: Prof. Antonio Caminha**

**02 de Janeiro de 2026**



**PORTAL DA  
MATEMÁTICA  
OBMEP**

# 1 A Lei dos Senos

O objetivo desse material é demonstrar e exibir algumas aplicações do teorema 2, que é conhecido como a **Lei dos Senos**. Antes, contudo, assim como fizemos na primeira parte para o cosseno, precisamos estender a definição de seno a ângulos retos e obtusos. Para fazê-lo, note que se  $\alpha$  for um ângulo obtuso, então:

$$\begin{aligned} 90^\circ < \alpha < 180^\circ &\iff -180^\circ < -\alpha < -90^\circ \\ &\iff 0^\circ < 180^\circ - \alpha < 90^\circ, \end{aligned}$$

ou seja,  $180^\circ - \alpha$  é um ângulo agudo. Assim, para  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , definimos o seno de  $\alpha$  pondo

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha).$$

Definimos, ainda,  $\operatorname{sen} 90^\circ = 0$ .

**Exemplo 1.** *Gracias à definição acima, temos que*

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 120^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

As razões da extensão da definição de seno dada acima ficarão claras quando, nos módulos do primeiro ano do Ensino Médio, começarmos a estudar os conceitos de seno e o cosseno em situações mais gerais, isto é, no âmbito da *Trigonometria*.

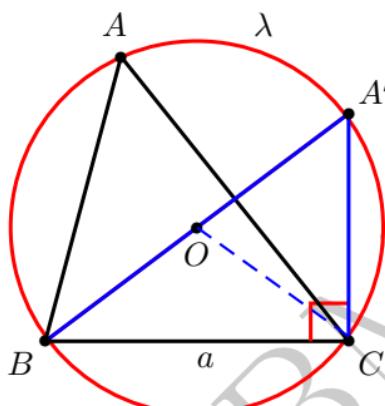
Para o enunciado da Lei dos Senos, recorde que o *círculo circunscrito* a um triângulo é o único círculo que passa por seus vértices.

**Teorema 2.** *Seja  $ABC$  um triângulo cujos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  medem, respectivamente,  $c$ ,  $b$  e  $a$ . Se denotarmos por  $R$  a medida do raio do círculo circunscrito a  $ABC$ , então:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R. \quad (1)$$

**Prova.** Trataremos apenas o caso em que o triângulo  $ABC$  é acutângulo, pois os outros casos podem ser analisados de modo inteiramente similar.

Sejam  $\lambda$  o círculo circunscrito a  $ABC$  e  $O$  o seu centro. Considere o ponto  $A'$  sobre  $\lambda$ , tal que  $A'B$  seja um diâmetro (veja a figura a seguir).



Note que  $A' \neq C$  e  $A' \neq A$ , pois caso contrário  $ABC$  seria retângulo, já que um de seus lados seria um diâmetro de  $\lambda$ . Por outro lado, como  $\angle A'CB$  está inscrito em um semicírculo, temos que  $A' \widehat{C} B = 90^\circ$ ; desse modo:

$$\operatorname{sen} \widehat{A'} = \frac{BC}{A'B} = \frac{a}{2R} \quad \therefore \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Agora, veja que  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ , pois, sendo ângulos inscritos em  $\lambda$  e subentendendo o mesmo arco  $\widehat{BC}$ , temos

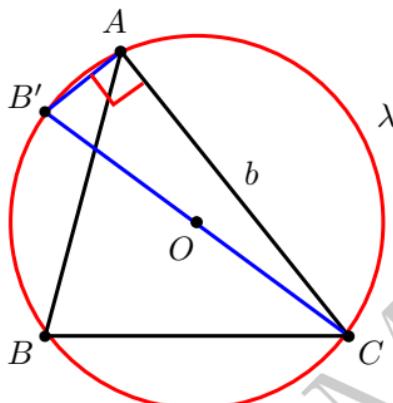
$$\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot B\widehat{O}C = \widehat{A'}.$$

Portanto, obtemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Argumentos análogos ao executado acima para o vértice  $A$ , desta feita com o vértice  $B$  ou o vértice  $C$ , fornecem as

outras duas igualdades do enunciado. Por exemplo, considerando o ponto  $B'$  sobre  $\lambda$  tal que o segmento  $CB'$  seja um diâmetro, obtemos o triângulo  $B'AC$ , retângulo em  $A$  e tal que  $\widehat{B} = \widehat{B'}$  (veja a figura abaixo). Então,



$$\operatorname{sen} \widehat{B'} = \frac{b}{2R} \therefore \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B'}} = 2R;$$

daí,

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{b}{\sin \widehat{B'}} = 2R.$$

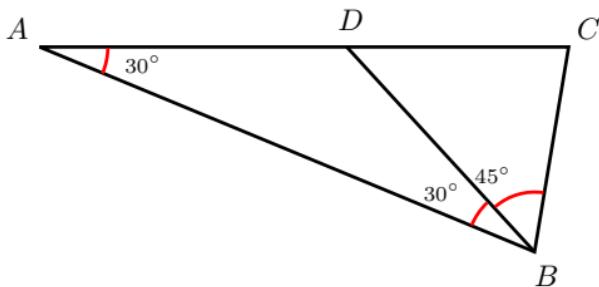
Da mesma forma, tomando o ponto  $C'$  sobre  $\lambda$  tal que  $AC'$  seja um diâmetro e repetindo os argumentos anteriores (desenhe uma figura para esse caso e repasse os argumentos correspondentes), chegamos à igualdade

$$\frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R.$$

1

Antes de examinarmos algumas consequências importantes da Lei dos Senos, vejamos, em dois exemplos, como tal resultado pode ser aplicado.

**Exemplo 3.** No triângulo da figura a seguir, temos que  $\widehat{BAD} = \widehat{ABD} = 30^\circ$ ,  $\widehat{CBD} = 45^\circ$  e  $\overline{AB} = 3 + \sqrt{3}$  cm. Calcule a medida do segmento  $CD$ .



**Solução.** Observe inicialmente que, como a soma dos ângulos de todo triângulo vale  $180^\circ$ , temos

$$A\hat{D}B = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

e, daí,

$$C\hat{D}B = 180^\circ - A\hat{D}B = 160^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Agora, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo  $ABD$ , juntamente com o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\sen 30^\circ} &= \frac{\overline{AB}}{\sen 120^\circ} \implies \frac{\overline{AD}}{\frac{1}{2}} &= \frac{3 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &\implies \overline{AD} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &\implies \overline{AD} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{3} \\ &\implies \overline{AD} = \frac{3(1 + \sqrt{3})}{3} \\ &\implies \overline{AD} = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Note, em seguida, que o triângulo  $ABC$  é isósceles de base  $BC$ , pois

$$A\hat{B}C = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

e (utilizando novamente a soma dos ângulos igual a  $180^\circ$ )

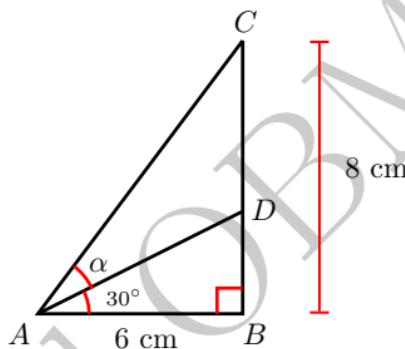
$$A\hat{C}B = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Portanto, fazendo  $\overline{CD} = x$  utilizando o fato de que  $ABC$  é isósceles de base  $BC$  implica  $\overline{AB} = \overline{AC}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{AC} = \overline{AB} &\Rightarrow x + (1 + \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} \\ &\Rightarrow x = 2 \text{ cm.}\end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.** Na figura abaixo,  $ABC$  é um triângulo retângulo em  $B$ , com catetos  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$  e  $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ . Se  $D$  for um ponto sobre o cateto  $BC$  tal que  $\widehat{BAD} = 30^\circ$  e  $\widehat{CAD} = \alpha$ , quanto vale  $\operatorname{sen} \alpha$ ?



**Solução.** Como na solução do exemplo anterior, calculamos

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

e

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Agora, o Teorema de Pitágoras fornece

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 \quad \therefore \overline{AC}^2 = 100 \quad \therefore \overline{AC} = 10.$$

Além disso, olhando para o triângulo  $ABD$ , obtemos:

$$\frac{\overline{BD}}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Daí, segue que

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 8 - 2\sqrt{3}.$$

Finalmente, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo  $ADC$  e utilizando novamente o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CD}}{\sin \alpha} &= \frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{ADC}} \implies \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 120^\circ} \\ &\implies \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &\implies \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{20}{\sqrt{3}} \\ &\implies \sin \alpha = \frac{8\sqrt{3} - 6}{20} \\ &\implies \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}.\end{aligned}$$

□

O resultado a seguir aplica a Lei dos Senos ao cálculo da área de um triângulo. As igualdades em (2) são conhecidas como as **fórmulas do seno para a área de um triângulo**.

**Corolário 5.** *Seja  $ABC$  um triângulo cujos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  medem, respectivamente,  $c$ ,  $b$  e  $a$ . Se  $A(ABC)$  denota a área de  $ABC$ , então*

$$A(ABC) = \frac{bc \sin \widehat{A}}{2} = \frac{ac \sin \widehat{B}}{2} = \frac{ab \sin \widehat{C}}{2}. \quad (2)$$

*Denotando por  $R$  o raio do círculo circunscrito a  $ABC$ , temos também que*

$$A(ABC) = \frac{abc}{4R}. \quad (3)$$

**Prova.** Para a primeira parte (isto é, para as fórmulas (2)), é suficiente estabelecermos a primeira delas, uma vez que as outras duas podem ser obtidas de modo análogo.

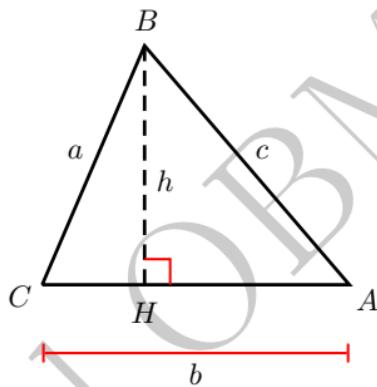
Primeiramente, se  $ABC$  for retângulo em  $A$ , podemos ver  $AB$  como base e  $AC$  como altura de  $ABC$  (ou vice-versa), de sorte que

$$A(ABC) = \frac{bc}{2}.$$

Recordando que  $\sin 90^\circ = 1$ , obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}.$$

Suponha, agora, que  $ABC$  seja acutângulo (veja a figura abaixo). Sendo  $H$  o pé da altura baixada em relação à reta



suporte do lado  $AC$ , temos que  $H$  está situado sobre o lado  $AC$ ; denotando  $h = \overline{BH}$ , temos:

$$\sin \hat{A} = \frac{h}{c} \implies h = c \sin \hat{A}.$$

Então,

$$A(ABC) = \frac{bh}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}.$$

O caso em que  $ABC$  é obtusângulo é inteiramente análogo e, por isso, será deixado ao leitor.

Para (3), observe que a Lei dos Senos dá:

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{2R}.$$

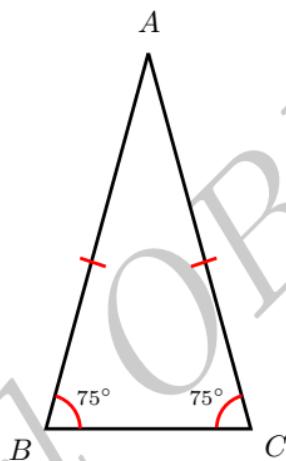
Substituindo tal expressão na primeira igualdade em (2), obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

□

Os dois exemplos seguintes aplicam as fórmulas do corolário anterior.

**Exemplo 6.** Calcule a área de um triângulo  $ABC$ , sabendo que  $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$  cm e  $\widehat{B} = 75^\circ$ .



**Solução.** Iniciamos calculando  $B\widehat{A}C$ , observando que  $\overline{AB} = \overline{AC}$  implica  $\widehat{B} = \widehat{C}$ , logo,  $\widehat{C} = 75^\circ$ :

$$\widehat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Agora, aplicamos a fórmula do seno para a área, obtendo:

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin 30^\circ}{2} \\ &= \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{100}{4} \\ &= 25 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

□

O próximo exemplo é não trivial, e pode ser omitido numa primeira leitura.

**Exemplo 7** (Olimpíada Canadense). *Um triângulo  $ABC$  é tal que  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ . Sabendo que sua área é igual a  $\frac{b^2 + c^2}{4}$ , calcule as medidas de seus ângulos internos.*

**Solução.** Pondo  $\overline{BC} = a$  e aplicando a fórmula do seno para a área, obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{4} = \frac{bc \operatorname{sen} \hat{A}}{2} \quad \therefore \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

Agora, um pouco de álgebra elementar fornece

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + c^2}{2bc} &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc + 2bc}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{2bc} + \frac{2bc}{2bc} \\ &= \frac{(b - c)^2}{2bc} + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Além disso, os passos acima deixam claro que

$$\frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1 \iff \frac{(b - c)^2}{2bc} = 0 \iff b = c. \quad (4)$$

Juntando as duas informações acima, concluímos que

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq 1. \quad (5)$$

Mas, como  $\operatorname{sen} \hat{A} \leq 1$  por definição, segue que devemos ter  $\operatorname{sen} \hat{A} = 1$ , de modo que  $\hat{A} = 90^\circ$ .

Por outro lado, sendo  $\operatorname{sen} \hat{A} = 1$ , as relações em (5) implicam

$$\frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1,$$

de maneira que, por (4), devemos ter  $b = c$ .

Então,  $ABC$  é retângulo em  $A$  e isósceles de base  $BC$ , de sorte que

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

□

Terminamos este material apresentando uma outra fórmula útil para o cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecida como **fórmula de Herão**. Tal fórmula expressa a área em função apenas das medidas dos lados do triângulo.

**Corolário 8.** *Se  $ABC$  for um triângulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e semiperímetro  $p$ , então*

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**Prova.** Primeiramente, utilizando o Corolário 5 e a relação  $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{bc \sin \widehat{A}}{2} \Rightarrow 2A(ABC) = bc \sin \widehat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2 c^2 \sin^2 \widehat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2 c^2 (1 - \cos^2 \widehat{A}). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A},$$

logo,

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Substituindo tal expressão para  $\cos \widehat{A}$  no segundo membro da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2 c^2} = 1 - \cos^2 \widehat{A}$$

e aplicando as fórmulas para o quadrado da soma de dois termos e para a diferença de dois quadrados<sup>1</sup>, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\
 &= \left( 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\
 &= \left( \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left( \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \right) \\
 &= \frac{[(b+c)^2 - a^2] [a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)]}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{[(b+c)^2 - a^2] [a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+(b-c))(a-(b-c))}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}.
 \end{aligned}$$

Recordando que  $2p = a + b + c$ , temos

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

e, analogamente,  $a + b - c = 2(p - c)$ ,  $a - b + c = 2(p - b)$ .  
Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}.
 \end{aligned}$$

Por fim, cancelando o fator  $\frac{4}{b^2c^2}$  em ambos os membros da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2},$$

<sup>1</sup> Isto é, os produtos notáveis  $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$  e  $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ ; em particular, como  $1 = 1^2$ , temos que  $1 - y^2 = (1-y)(1+y)$ .

ficamos com

$$[A(ABC)]^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

e a fórmula de Herão segue após extrairmos raízes quadradas em ambos os membros dessa última igualdade.  $\square$

**Exemplo 9.** Calcule a área do triângulo escaleno  $ABC$  cujos lados medem 13 cm, 14 cm e 15 cm.

**Solução.** Vamos usar a fórmula de Herão, para o que começamos calculando o semiperímetro  $p$  do triângulo:

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84. \end{aligned}$$

$\square$

## Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Explique o caso em que o triângulo  $ABC$  é obtusângulo tanto no Teorema 2 quanto no Corolário 5, pois, embora os argumentos sejam análogos, é importante que os alunos compreendam o porquê dessa analogia. Recomendamos também que, ao expor os exemplos, sejam sempre ressaltados os momentos nos quais o Teorema 2 ou os Corolários 5 e 8 são utilizados.

As referências a seguir contêm mais exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, envolvendo a Lei dos Senos.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2022.
2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. São paulo, Editora Atual, 2013.

Portal OBMEP