

Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos - Parte 2

Nono Ano

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha**

02 de Janeiro de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 A Lei dos Senos

O objetivo desse material é demonstrar e exibir algumas aplicações do teorema 2, que é conhecido como a **Lei dos Senos**. Antes, contudo, assim como fizemos na primeira parte para o cosseno, precisamos estender a definição de seno a ângulos retos e obtusos. Para fazê-lo, note que se α for um ângulo obtuso, então:

$$\begin{aligned}90^\circ < \alpha < 180^\circ &\iff -180^\circ < -\alpha < -90^\circ \\ &\iff 0^\circ < 180^\circ - \alpha < 90^\circ,\end{aligned}$$

ou seja, $180^\circ - \alpha$ é um ângulo agudo. Assim, para $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, definimos o seno de α pondo

$$\text{sen } \alpha = \text{sen}(180^\circ - \alpha).$$

Definimos, ainda, $\text{sen } 90^\circ = 0$.

Exemplo 1. *Graças à definição acima, temos que*

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen}(180^\circ - 120^\circ) = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

As razões da extensão da definição de seno dada acima ficarão claras quando, nos módulos do primeiro ano do Ensino Médio, começarmos a estudar os conceitos de seno e o cosseno em situações mais gerais, isto é, no âmbito da *Trigonometria*.

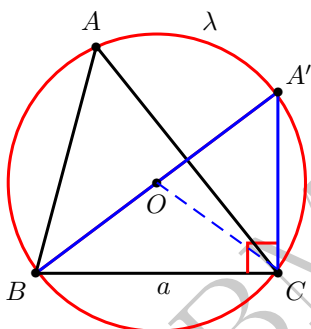
Para o enunciado da Lei dos Senos, recorde que o *círculo circunscrito* a um triângulo é o único círculo que passa por seus vértices.

Teorema 2. *Seja ABC um triângulo cujos lados AB , AC e BC medem, respectivamente, c , b e a . Se denotarmos por R a medida do raio do círculo circunscrito a ABC , então:*

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2R. \quad (1)$$

Prova. Trataremos apenas o caso em que o triângulo ABC é acutângulo, pois os outros casos podem ser analisados de modo inteiramente similar.

Sejam λ o círculo circunscrito a ABC e O o seu centro. Considere o ponto A' sobre λ , tal que $A'B$ seja um diâmetro (veja a figura a seguir).



Note que $A' \neq C$ e $A' \neq A$, pois caso contrário ABC seria retângulo, já que um de seus lados seria um diâmetro de λ . Por outro lado, como $\angle A'CB$ está inscrito em um semicírculo, temos que $\widehat{A'CB} = 90^\circ$; desse modo:

$$\operatorname{sen} \widehat{A'} = \frac{BC}{A'B} = \frac{a}{2R} \quad \therefore \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Agora, veja que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, pois, sendo ângulos inscritos em λ e subentendendo o mesmo arco \widehat{BC} , temos

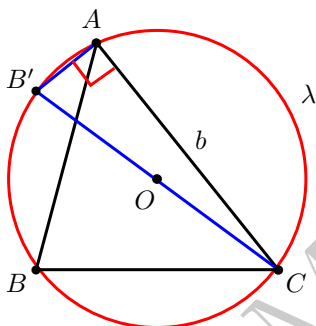
$$\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BOC} = \widehat{A'}.$$

Portanto, obtemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Argumentos análogos ao executado acima para o vértice A , desta feita com o vértice B ou o vértice C , fornecem as

outras duas igualdades do enunciado. Por exemplo, considerando o ponto B' sobre λ tal que o segmento CB' seja um diâmetro, obtemos o triângulo $B'AC$, retângulo em A e tal que $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (veja a figura abaixo). Então,



$$\operatorname{sen} \widehat{B'} = \frac{b}{2R} \quad \therefore \quad \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B'}} = 2R;$$

daí,

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B'}} = 2R.$$

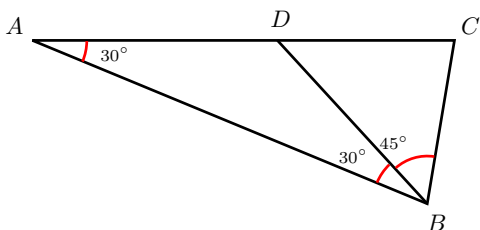
Da mesma forma, tomando o ponto C' sobre λ tal que AC' seja um diâmetro e repetindo os argumentos anteriores (desenhe uma figura para esse caso e repasse os argumentos correspondentes), chegamos à igualdade

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R.$$

□

Antes de examinarmos algumas consequências importantes da Lei dos Senos, vejamos, em dois exemplos, como tal resultado pode ser aplicado.

Exemplo 3. No triângulo da figura a seguir, temos que $\widehat{BAD} = \widehat{ABD} = 30^\circ$, $\widehat{CBD} = 45^\circ$ e $\overline{AB} = 3 + \sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do segmento CD .



Solução. Observe inicialmente que, como a soma dos ângulos de todo triângulo vale 180° , temos

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

e, daí,

$$\widehat{CDB} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Agora, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ABD , juntamente com o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\text{sen } 30^\circ} &= \frac{\overline{AB}}{\text{sen } 120^\circ} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\frac{1}{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &\Rightarrow \overline{AD} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \overline{AD} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{3} \\ &\Rightarrow \overline{AD} = \frac{3(1 + \sqrt{3})}{3} \\ &\Rightarrow \overline{AD} = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Note, em seguida, que o triângulo ABC é isósceles de base BC , pois

$$\widehat{ABC} = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

e (utilizando novamente a soma dos ângulos igual a 180°)

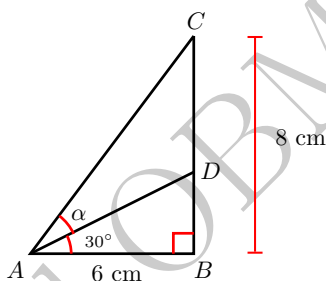
$$\widehat{ACB} = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Portando, fazendo $\overline{CD} = x$ utilizando o fato de que ABC isósceles de base BC implica $\overline{AB} = \overline{AC}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{AC} = \overline{AB} &\implies x + (1 + \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} \\ &\implies x = 2 \text{ cm.}\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. Na figura abaixo, ABC é um triângulo retângulo em B , com catetos $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$. Se D for um ponto sobre o cateto BC tal que $\widehat{BAD} = 30^\circ$ e $\widehat{CAD} = \alpha$, quanto vale $\sin \alpha$?



Solução. Como na solução do exemplo anterior, calculamos

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

e

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Agora, o Teorema de Pitágoras fornece

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 \therefore \overline{AC}^2 = 100 \therefore \overline{AC} = 10.$$

Além disso, olhando para o triângulo ABD , obtemos:

$$\frac{\overline{BD}}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies \overline{BD} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Daí, segue que

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 8 - 2\sqrt{3}.$$

Finalmente, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ADC e utilizando novamente o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} \widehat{ADC}} \Rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{10}{\operatorname{sen} 120^\circ} \\ &\Rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{20}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{8\sqrt{3} - 6}{20} \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}.\end{aligned}$$

□

O resultado a seguir aplica a Lei dos Senos ao cálculo da área de um triângulo. As igualdades em (2) são conhecidas como as **fórmulas do seno para a área de um triângulo**.

Corolário 5. *Seja ABC um triângulo cujos lados AB , AC e BC medem, respectivamente, c , b e a . Se $A(ABC)$ denota a área de ABC , então*

$$A(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{A}}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \widehat{B}}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \widehat{C}}{2}. \quad (2)$$

Denotando por R o raio do círculo circunscrito a ABC , temos também que

$$A(ABC) = \frac{abc}{4R}. \quad (3)$$

Prova. Para a primeira parte (isto é, para as fórmulas (2)), é suficiente estabelecermos a primeira delas, uma vez que as outras duas podem ser obtidas de modo análogo.

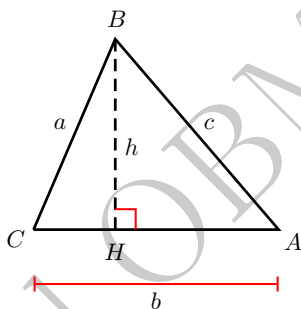
Primeiramente, se ABC for retângulo em A , podemos ver AB como base e AC como altura de ABC (ou vice-versa), de sorte que

$$A(ABC) = \frac{bc}{2}.$$

Recordando que $\sin 90^\circ = 1$, obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}.$$

Suponha, agora, que ABC seja acutângulo (veja a figura abaixo). Sendo H o pé da altura baixada em relação à reta



suporte do lado AC , temos que H está situado sobre o lado AC ; denotando $h = \overline{BH}$, temos:

$$\sin \hat{A} = \frac{h}{c} \implies h = c \sin \hat{A}.$$

Então,

$$A(ABC) = \frac{bh}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}.$$

O caso em que ABC é obtusângulo é inteiramente análogo e, por isso, será deixado ao leitor.

Para (3), observe que a Lei dos Senos dá:

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{2R}.$$

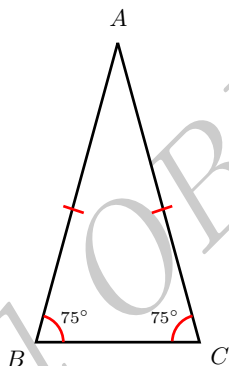
Substituindo tal expressão na primeira igualdade em (2), obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

□

Os dois exemplos seguintes aplicam as fórmulas do corolário anterior.

Exemplo 6. Calcule a área de um triângulo ABC , sabendo que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm e $\hat{B} = 75^\circ$.



Solução. Iniciamos calculando \hat{A} , observando que $\overline{AB} = \overline{AC}$ implica $\hat{B} = \hat{C}$, logo, $\hat{C} = 75^\circ$:

$$\hat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Agora, aplicamos a fórmula do seno para a área, obtendo:

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sen 30^\circ}{2} \\ &= \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{100}{4} \\ &= 25 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

□

O próximo exemplo é não trivial, e pode ser omitido numa primeira leitura.

Exemplo 7 (Olimpíada Canadense). *Um triângulo ABC é tal que $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Sabendo que sua área é igual a $\frac{b^2+c^2}{4}$, calcule as medidas de seus ângulos internos.*

Solução. Pondo $\overline{BC} = a$ e aplicando a fórmula do seno para a área, obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{4} = \frac{bc \operatorname{sen} \hat{A}}{2} \therefore \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

Agora, um pouco de álgebra elementar fornece

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + c^2}{2bc} &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc + 2bc}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{2bc} + \frac{2bc}{2bc} \\ &= \frac{(b - c)^2}{2bc} + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Além disso, os passos acima deixam claro que

$$\frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1 \iff \frac{(b - c)^2}{2bc} = 0 \iff b = c. \quad (4)$$

Juntando as duas informações acima, concluímos que

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq 1. \quad (5)$$

Mas, como $\operatorname{sen} \hat{A} \leq 1$ por definição, segue que devemos ter $\operatorname{sen} \hat{A} = 1$, de modo que $\hat{A} = 90^\circ$.

Por outro lado, sendo $\operatorname{sen} \hat{A} = 1$, as relações em (5) implicam

$$\frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1,$$

de maneira que, por (4), devemos ter $b = c$.

Então, ABC é retângulo em A e isósceles de base BC , de sorte que

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

□

Terminamos este material apresentando uma outra fórmula útil para o cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecida como **fórmula de Herão**. Tal fórmula expressa a área em função apenas das medidas dos lados do triângulo.

Corolário 8. Se ABC for um triângulo de lados a , b , c e semiperímetro p , então

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Prova. Primeiramente, utilizando o Corolário 5 e a relação $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A}$, obtemos:

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{bc \sin \hat{A}}{2} \Rightarrow 2A(ABC) = bc \sin \hat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2 c^2 \sin^2 \hat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2 c^2 (1 - \cos^2 \hat{A}). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

logo,

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Substituindo tal expressão para $\cos \hat{A}$ no segundo membro da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2 c^2} = 1 - \cos^2 \hat{A}$$

e aplicando as fórmulas para o quadrado da soma de dois termos e para a diferença de dois quadrados¹, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\
 &= \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\
 &= \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \right) \\
 &= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)]}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+(b-c))(a-(b-c))}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}.
 \end{aligned}$$

Recordando que $2p = a + b + c$, temos

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

e, analogamente, $a + b - c = 2(p - c)$, $a - b + c = 2(p - b)$.
Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2} \\
 &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}.
 \end{aligned}$$

Por fim, cancelando o fator $\frac{4}{b^2c^2}$ em ambos os membros da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2},$$

¹Isto é, os produtos notáveis $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ e $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$; em particular, como $1 = 1^2$, temos que $1 - y^2 = (1-y)(1+y)$.

ficamos com

$$[A(ABC)]^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

e a fórmula de Herão segue após extrairmos raízes quadradas em ambos os membros dessa última igualdade. \square

Exemplo 9. Calcule a área do triângulo escaleno ABC cujos lados medem 13 cm, 14 cm e 15 cm.

Solução. Vamos usar a fórmula de Herão, para o que começamos calculando o semiperímetro p do triângulo:

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84. \end{aligned}$$

\square

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Explique o caso em que o triângulo ABC é obtusângulo tanto no Teorema 2 quanto no Corolário 5, pois, embora os argumentos sejam análogos, é importante que os alunos compreendam o porquê dessa analogia. Recomendamos também que, ao expor os exemplos, sejam sempre ressaltados os momentos nos quais o Teorema 2 ou os Corolários 5 e 8 são utilizados.

As referências a seguir contêm mais exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, envolvendo a Lei dos Senos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2022.
2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. São paulo, Editora Atual, 2013.