Material Teórico - Módulo Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e o Teorema da Divisão Euclidiana

Números Naturais e Problemas de Contagem Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

21 de agosto de 2016

1 O princípio multiplicativo

Iniciamos esta seção enunciando as duas propriedades abaixo, conhecidas respectivamente como o **Princípio Aditivo** e o **Princípio Multiplicativo**, e que servem de base para a resolução de vários problemas de contagem.

Proposição 1. *Se A e B são conjuntos finitos cuja interseção é vazia, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, em que $n(A)$ denota o número de elementos de A, $n(B)$ denota o número de elementos de B e $n(A \cup B)$ denota o número de elementos de $A \cup B$.*

Proposição 2. *Se uma decisão d_1 pode ser tomada de m modos e uma outra decisão d_2, independente de d_1, pode ser tomada de n modos, então o número de modos de se tomar as decisões d_1 e d_2 simultaneamente é $m \cdot n$.*

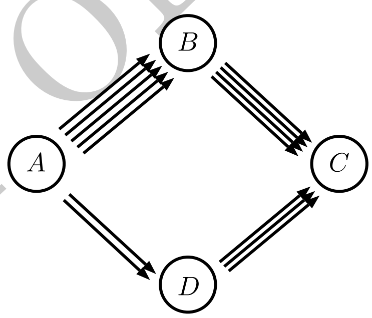
É relativamente simples ver porque o princípio aditivo é verdadeiro; por isso, deixamos essa tarefa ao leitor. Quanto ao princípio multiplicativo, basta observar que podemos listar os possíveis modos de tomarmos as decisões d_1 e d_2 simultaneamente da seguinte forma: começamos formando uma tabela com m linhas e n colunas, na qual cada linha corresponde a um modo de tomar a decisão d_1 e cada coluna a um modo de tomar a decisão d_2. Em seguida, observamos que a tabela tem $m \cdot n$ entradas, e que cada uma delas corresponde a uma escolha simultânea de uma decisão para d_1 e outra para d_2.

A seguir, colecionamos alguns exemplos que ilustram como os princípios aditivo e multiplicativo podem ser utilizados na resolução de problemas.

Exemplo 3. *Um certo país possui 4 cidades, denominadas A, B, C e D. Existem 5 estradas ligando A e B, 4 estradas ligando B a C, 2 estradas ligando A a D e 3 estradas ligando D a A. Se tais estradas têm mão única, calcule quantas são as maneiras diferentes de viajarmos de A até C:*

(a) passando por B.

(b) passando por B ou D.



Solução. Utilizando o princípio multiplicativo, temos $5 \cdot 4 = 20$ modos diferentes de viajar de A até C passando por B e outros $2 \cdot 3 = 6$ modos diferentes de viajar de A até C passando por B. Portanto, pelo princípio aditivo, temos $20 + 6 = 26$ maneiras diferentes de viajar de A até C. Assim, a resposta do item (a) é 20, ao passo que a do item (b) é 26. □

Exemplo 4. *Quantos são os números ímpares formados por 3 algarismos?*

Solução. Podemos reduzir a solução do problema à tomada simultânea de três decisões: escolher o algarismo das unidades, escolher o algarismo das dezenas e escolher o algarismo das centenas.

Podemos escolher o algarismo das unidades de 5 modos, pois, uma vez que estamos contando os números ímpares com três algarismos, o algarismo das unidades deve pertencer ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para a escolha dos algarismo das dezenas temos 10 possibilidades, pois não há qualquer restrição para essa escolha, isto é, esse algarismo pode ser qualquer elemento do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Finalmente, temos 9 modos de escolher o algarismo das centenas, pois ele não pode ser igual a zero, ou seja, deve ser um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidadde de números ímpares formados por 3 algarismos é $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$. □

Exemplo 5. *Quantos divisores positivos possui o número 360?*

Solução. Fatorando o número 360 em um produto de números primos, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

Nosso objetivo é contar todos os divisores positivos de 360. Como vimos acima, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, então, qualquer divisor de 360 necessariamente tem a forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, em que $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ e $c \in \{0, 1\}$ (pois um divisor de um número não pode ter mais cópias de um fator primo do que o próprio número). Assim, temos 4 modos de escolher a, 3 modos de escolher b e 2 modos de escolher c. Como tais escolhas são simultâneas, segue do princípio multiplicativo que 360 possui $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ divisores positivos. □

Observação 6. *Seguindo o raciocínio empregado na resolução do exemplo 5, podemos estabelecer uma fórmula* *para calcular a quantidade de divisores positivos de um número inteiro qualquer N. Para tanto, primeiro fatoramos N em um produto de potências de números primos distintos. O número de divisores positivos de N é dado pelo produto dos sucessores dos expoentes que aparecem nessa fatoração. Em símbolos matemáticos, se*

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

com p_1, p_2, ..., p_r números primos distintos e α_1, α_2, ..., α_r inteiros positivos, então a quantidade de divisores positivos de N é dada por

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r + 1).$$

Exemplo 7. *Quantos divisores positivos possui o número $N = 20^2 \cdot 32 \cdot 7^3$?*

Solução. De acordo com a observação anterior, temos inicialmente que escrever N como produto de potências de primos distintos. Para tanto, note que

$$\begin{aligned} 20^2 \cdot 32 \cdot 7^3 &= (2^2 \cdot 5)^2 \cdot 2^5 \cdot 7^3 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 2^5 \cdot 7^3 \\ &= 2^9 \cdot 5^2 \cdot 7^3. \end{aligned}$$

Portanto, novamente pela observação 6, N possui

$$(9 + 1)(2 + 1)(3 + 1) = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

divisores positivos. □

A seguir, apresentamos um exemplo mais elaborado.

Exemplo 8. *Calcule a quantidade de pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação*

$$\frac{xy}{x+y} = 144.$$

Solução. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{xy}{x+y} = 144 &\iff xy = 144 \cdot (x + y) \\ &\iff xy = 144x + 144y \\ &\iff xy - 144y = 144x \\ &\iff y \cdot (x - 144) = 144x \\ &\iff y = \frac{144x}{x - 144}. \end{aligned}$$

Fazendo $n = x - 144$, temos $x = n + 144$ e, assim,

$$\begin{aligned} y &= \frac{144x}{x - 144} = \frac{144 \cdot (n + 144)}{n} \\ &= \frac{144n + 144^2}{n} = 144 + \frac{144^2}{n}. \end{aligned}$$

Agora, observe que estamos procurando valores inteiros positivos para x, de forma que $n + 144 > 0$ ou, o que é o mesmo, $n > -144$. Como também estamos procurando valores inteiros positivos para y, concluímos, a partir da última equação acima, que n deve ser um divisor de 144^2, tal que $144 + \frac{144^2}{n} > 0$. Isso é o mesmo que $\frac{n+144}{n} > 0$ e, como $n + 144 > 0$ devemos ter $n > 0$.

Então, n é um divisor positivo de 144^2. Também é fácil verificar que, para cada divisor positivo n de 144^2, temos um valor para x e um valor para y, de tal forma que valores distintos para n fornecem pares (x, y) distintos. Portanto, a quantidade de pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $\frac{xy}{x+y} = 144$ é igual à quantidade de divisores positivos de 144^2.

Para o que falta, como $144^2 = \left(2^4 \cdot 3^2\right)^2 = 2^8 \cdot 3^4$, a observação 6 garante que a quantidade de divisores positivos de 144^2 é $(8 + 1)(4 + 1) = 9 \cdot 5 = 45$. □

2 Mais alguns problemas de contagem

Esta seção coleciona mais exemplos de problemas de contagem, a fim de ilustrar sua diversidade para o leitor. Ao ler as soluções dos exemplos mostrados aqui, o leitor perceberá que não há *regras gerais* ou *fórmulas mágicas* para resolver problemas de contagem. De outra forma, o mais das vezes um pouco de raciocínio será mais útil do que quaisquer fórmulas.

Exemplo 9. *Um programa de computador calculou os números 2^{2016} e 5^{2016} e escreveu seus algarismos, de forma consecutiva, na tela. Quantos algarismos foram mostrados?*

Solução. Denotemos por m a quantidade de algarismos do número 2^{2016} e por n a quantidade de algarismos do número 5^{2016}. Nosso objetivo é calcular o valor de $m + n$.

Como 2^{2016} possui m algarismos, 10^{m-1} é o menor número com m algarismos e 10^m é o menor número com $m + 1$ algarismos, concluímos que

$$10^{m-1} < 2^{2016} < 10^m.$$

Analogamente,

$$10^{n-1} < 5^{2016} < 10^n.$$

Multiplicando as desigualdades acima e utilizando as propriedades de potenciação, obtemos:

$$10^{m+n-2} < 10^{2016} < 10^{m+n}.$$

Então, devemos ter $m + n - 2 < 2016$ e $m + n > 2016$ ou, o que é o mesmo, $2016 < m + n < 2018$. Portanto, $m + n = 2017$. □

Exemplo 10. *Quantos números inteiros e positivos satisfazem a dupla inequação abaixo?*

$$2000 < \sqrt{n(n-1)} < 2016$$

Solução. Temos:

$$2000 < \sqrt{n(n-1)} < 2016$$

$$\iff 2000^2 < \left(\sqrt{n(n-1)}\right)^2 < 2016^2$$

$$\iff 2000^2 < n(n-1) < 2016^2.$$

Agora, como n é um inteiro positivo, é imediato observar que

$$n(n-1) > 2000^2 \iff n > 2000$$

e, analogamente,

$$n(n-1) < 2016^2 \iff n < 2017.$$

Portanto, n satisfaz a dupla inequação do enunciado se, e somente se, $2001 \leq n \leq 2016$, de sorte que temos um total de 16 soluções inteiras e positivas para a mesma. □

Exemplo 11. *Em um certo país, a cada* 20 *matemáticos, um deles também é músico, enquanto que a cada* 30 *músicos, um deles também é matemático. Há mais músicos ou matemáticos nesse país?*

Solução. Se denotamos por n a quantidade de habitantes que são músicos e matemáticos ao mesmo tempo, temos que a quantidade de matemáticos é $20n$, pois a cada 20 matemáticos, um também é músico. Por razões análogas, a quantidade de músicos é $30n$. Portanto, a quantidade de músicos é $1,5$ vezes a quantidade de matemáticos. □

Exemplo 12. *Uma urna contém* 12 *bolas azuis,* 7 *bolas vermelhas,* 9 *bolas brancas e* 2 *bolas pretas. Qual é o número mínimo de bolas que uma pessoa deve retirar da urna para que ela tenha a certeza de ter retirado pelo menos* 5 *bolas da mesma cor?*

Solução. No pior dos casos, antes de serem retiradas 5 bolas de uma mesma cor, terão sido retiradas 4 bolas azuis, 4 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, totalizando 14 bolas retiradas. A partir daí, a 15^{a} bola retirada deverá ser azul, vermelha ou branca, pois as 2 bolas pretas já terão sido retiradas. Portanto, 15 é o número mínimo de bolas que devem ser retiradas para que se tenha, com certeza, pelo menos 5 bolas de uma mesma cor. □

3 Somando os n primeiros naturais

Nesta seção, utilizamos ideias simples de contagem para calcular algumas somas de inteiros. Dentre essas, a mais importante é a colecionada no exemplo a seguir.

Exemplo 13. *Mostre que*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução. Inicialmente, note que a soma não se altera quando invertemos a ordem das parcelas, ou seja,

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1.$$

Denotando essa soma por S, podemos escrever:

$$S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$$
$$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$

Agora, somamos membro a membro as duas igualdades acima, tendo o cuidado de, no segundo membro, somarmos primeiro as primeiras parcelas, depois as segundas parcelas, depois as terceiras e assim por diante. Procedendo dessa forma, obtemos

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ vezes}}$$

de forma que $2S = n(n+1)$ e, daí, $S = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Exemplo 14. *Calcule o valor da soma* $1 + 2 + \ldots + 2016$.

Solução. Utilizando a fórmula dada no exemplo 13, obtemos:

$$1 + 2 + \ldots + 2016 = \frac{2016 \cdot 2017}{2} = 1008 \cdot 2017 = 2033136.$$

□

Exemplo 15. *Calcule o valor da seguinte soma de números naturais consecutivos:*

$$S = 35 + 36 + \ldots + 100.$$

Solução. Observe que, denotando $S_1 = 1 + 2 + \ldots + 34$ e $S_2 = 1 + 2 + \ldots + 100$, temos $S = S_2 - S_1$. Por outro lado, pela fórmula apresentada no exemplo 13, temos:

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + 34 = \frac{34 \cdot 35}{2} = 17 \cdot 35 = 595$$

e

$$S_2 = 1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Portanto, $S = 5050 - 595 = 4455$. □

Exemplo 16. *Qual número é maior, a soma de todos os números pares de* 0 *a* 100 *ou a soma de todos os números ímpares de* 1 *a* 99*? Qual a diferença entre o maior e o menor desses dois números?*

Solução. Calculando a soma dos números pares de 0 a 100, temos:

$$\begin{aligned} 0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 100 &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 50) \\ &= 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 2550. \end{aligned}$$

Quanto à soma dos números ímpares, temos

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+99 &= 1+(1+2)+(1+4) \\ &\quad +\ldots+(1+98) \\ &= \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{50 \text{ vezes}} \\ &\quad +2+4+6+\ldots+98 \\ &= 50+2\cdot(1+2+3+\ldots+49) \\ &= 50+2\cdot\frac{49\cdot 50}{2} \\ &= 50+2450=2500. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos números pares de 0 a 100 é maior que a soma dos números ímpares de 1 a 99. Além disso, a diferença entre esses dois números é igual a 50. $\square$

Exemplo 17. *Calcule o valor da soma dos múltiplos de* 3 *compreendidos entre* 1 *e* 200.

Solução. Os múltiplos de 3 entre 1 e 200 são $\{3, 6, \ldots, 198\}$. Então, o que queremos é encontrar o valor da soma

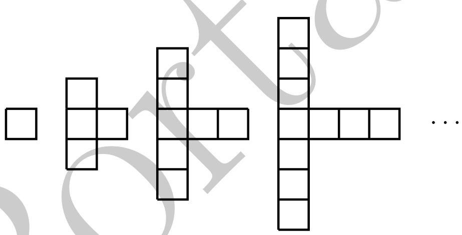
$$S = 3+6+\ldots+198.$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned} S = 3+6+\ldots+198 &= 3\cdot(1+2+\ldots+66) \\ &= 3\cdot\frac{66.67}{2} \\ &= 3\cdot 33\cdot 67 \\ &= 6633. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 18. *Considere a sequência de figuras formadas por pequenos azulejos quadrados e desenhada abaixo. Quantos azulejos são necessários para formar desde a primeira até a centésima figura?*



Solução. Observe que a primeira figura é formada por apenas 1 azulejo, e a partir da segunda, cada figura pode ser formada a partir da anterior acrescentando-se 3 azulejos, sendo um em cada ponta. Então, a segunda figura é formada por $1+3=4$ azulejos, a terceira é formada por $1+2\cdot 3=7$ azulejos, a quarta é formada por $1+3\cdot 3=10$ azulejos, e assim por diante.

Dessa forma, concluímos que a centésima figura é formada por $1+99\cdot 3=298$ azulejos. Portanto, a quantidade de azulejos utilizados para formar desde a primeira até a centésima figura é:

$$1+(1+3)+(1+2\cdot 3)+(1+3\cdot 3)+\ldots+(1+99\cdot 3)=$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{1+1+\ldots+1}_{100 \text{ vezes}}+3+2\cdot 3+3\cdot 3+\ldots+99\cdot 3 \\ &= 100+3\cdot(1+2+3+\ldots+99) \\ &= 100+3\cdot\frac{99\cdot 100}{2} \\ &= 100+3\cdot 4950=14950. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 19. *Considere a sequência dos* 50 *primeiros números naturais. É possível escrever um dos sinais* $+$ *ou* $-$ *antes de cada um desses números de tal modo que o resultado da expressão numérica resultante seja igual a zero?*

$$\square\ 1\ \square\ 2\ \square\ 3\ \square\ 4\ \ldots\ \square\ 49\ \square\ 50$$

Solução. Suponha que seja possível pôr um dos sinais $+$ ou $-$ em cada quadradinho da figura acima, de modo que o resultado da expressão numérica obtida seja igual a zero. Podemos separar os números do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 49, 50\}$ em dois subconjuntos, um deles, que denotaremos por A_1, formado pelos números que são precedidos pelo sinal $+$, e o outro, que denotaremos por A_2, formado pelos números que são precedidos pelo sinal $-$. Para que o resultado da expressão seja zero, a soma dos números dos dois grupos deve ser a mesma. Denotemos essa soma por S. Como a reunião dos elementos dos dois grupos é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 49, 50\}$, a soma dos elementos de A deve ser igual a $2S$. Logo, a soma dos elementos de A deve ser um número par. Mas, pelo exemplo 13, a soma dos elementos do conjunto A é dada por:

$$1+2+3+4+\ldots+49+50=\frac{50\cdot 51}{2}=1275.$$

Como essa soma é um número ímpar, o que nos leva a concluir que não é possível pôr um dos sinais $+$ ou $-$ nos quadradinhos de modo que o resultado da expressão seja zero. $\square$

4 Somando os n primeiros quadrados

Terminamos este material mostrando como somar os n primeiros quadrados perfeitos.

Exemplo 20. *Mostre que*

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solução. Iniciamos recordando a fórmula para o cubo da soma de dois termos, apresentada no módulo de produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Utilizando essa fórmula, podemos escrever:

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1^2+1^3$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1^2+1^3$$
$$4^3=(3+1)^3=3^3+3\cdot 3^2\cdot 1+3\cdot 3\cdot 1^2+1^3$$
$$\vdots$$
$$n^3=(n-1)^3+3\cdot(n-1)^2\cdot 1+3\cdot(n-1)\cdot 1^2+1^3$$
$$(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2\cdot 1+3\cdot n\cdot 1^2+1^3.$$

(Note que na penúltima das igualdades acima, escrevemos $n=(n-1)+1$.)

Agora, somando todas essas n igualdades membro a membro, percebemos que os cubos dos números inteiros de 2 até n figuram em ambos os lados da equação. Portanto, podemos cancelar esses cubos, restando apenas $(n+1)^3$ do lado esquerdo. Então, denotando

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2,$$

temos:

$$\begin{aligned}(n+1)^3&=1^3+3S+3(1+2+\ldots+n)+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ vezes}}\\&=1+3S+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n.\end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}3S&=(n+1)^3-1-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\\ \Rightarrow 6S&=2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)\\ \Rightarrow 6S&=(n+1)[2(n+1)^2-3n-2]\\ \Rightarrow 6S&=(n+1)[2n^2+4n+2-3n-2]\\ \Rightarrow 6S&=(n+1)[2n^2+n]\\ \Rightarrow 6S&=(n+1)n(2n+1)\\ \Rightarrow S&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 21. *Calcule o valor da soma:*

$$S=1+4+9+16+\ldots+2500.$$

Solução. Observe que a soma acima é a soma dos primeiros cinquenta quadrados, ou seja,

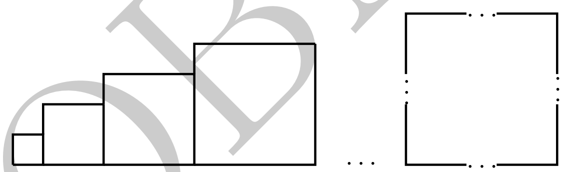
$$S=1^2+2^2+3^3+\ldots+50^2.$$

Portanto, pela fórmula deduzida no exemplo anterior, temos

$$S=\frac{50\cdot 51\cdot(2\cdot 50+1)}{6}=\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6}=42925.$$

□

Exemplo 22. *Uma figura Q é formada pela justaposição de 100 quadrados, sendo que o primeiro quadrado tem lado 1 cm, o segundo tem lado 2 cm, o terceiro tem lado 3 cm, e assim por diante até o centésimo, que tem lado 100 cm. Calcule a área de Q.*



Solução. Denotemos por A_Q a área de Q. Uma vez que a área de um quadrado é o quadrado do comprimento de seu lado, temos que A_Q é dada pela soma dos 100 primeiros quadrados. Assim, temos:

$$\begin{aligned}A_Q&=1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2\\&=\frac{100\cdot 101\cdot(2\cdot 100+1)}{6}\\&=\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}\\&=338350\,cm^2.\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas uma sessão de 50min para discutir as seções 1 e 2 e uma outra sessão de 50min para discutir as seções 3 e 4. Na seção 1, explique muito cuidadosamente os princípios aditivo e multiplicativo, enfatizando sua utilização nos exemplos que vêm em seguida. Nas seções 3 e 4, inicialmente proponha problemas envolvendo somas de números natuais e de quadrados de números naturais consecutivos, e somente depois apresente e dediza as fórmulas correspondentes. Isso vai fazer com que os alunos procurem estratégias não convencionais para calcular as somas em questão.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 4: Combinatória*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016.

2. D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg. *Mathematical World, Volume 8: Mathematical Circles (Russian Experience).* AMS, 1996.

3. E. Lima. *Análise Real, Volume 1.* Rio de Janeiro, SBM, 1993.

4. A. C. Morgado, J. B. P. de Carvalho, P. C. P. Carvalho e P. J. Fernandez. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro, SBM, 2004.