Material Teórico - Módulo Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Soma e produto de funções polinomiais complexas

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de fevereiro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Soma de funções polinomiais complexas

A soma e o produto de polinômios com coeficientes complexos deve ser realizada da mesma forma que a soma de polinômios com coeficientes reais.

Começamos centrando atenção na soma: basta adicionar os monômios de um aos do outro.

Exemplo 1. *Considere os seguintes polinômios com domínio e contradomínio $\mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 3ix^4 + (2+i)x^3 + 7, \\ g(x) &= -x^7 + 6x^5 - 3x^3 + 2x - 1, \\ h(x) &= -x^5 - 13ix^3 + 10x^2 - x. \end{aligned}$$

Calcule o polinômio que expressa a soma $f(x) + g(x)$ e o polinômio que expressa $f(x) + h(x)$.

Solução. Veja que, dentre $f(x)$ e $g(x)$, aquele que possui maior grau tem grau 7. Por isso, o resultado será um polinômio de grau menor ou igual a 7. Também, $f(x) + g(x)$ é o mesmo que:

$$(x^5 - 3ix^4 + (2+i)x^3 + 7) + (-x^7 + 6x^5 - 3x^3 + 2x - 1).$$

Para calcular a soma, começamos reordenando os monômios de acordo com potências decrescentes de x (ou da variável em questão), obtendo:

$$-x^7 + x^5 + 6x^5 - 3ix^4 + (2+i)x^3 - 3x^3 + 2x + 7 - 1.$$

Em seguida, colocamos monômios repetidos em evidência:

$$\begin{aligned} -x^7 + (1+6)x^5 - 3ix^4 + ((2+i) - 3)x^3 + 2x + 6 &= \\ = -x^7 + 7x^5 - 3ix^4 + (-1+i)x^3 + 2x + 6. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(x) + g(x) = -x^7 + 7x^5 - 3ix^4 + (-1+i)x^3 + 2x + 6.$$

Uma maneira *alternativa* de calcular a soma acima é por meio de um *dispositivo prático*, no qual um polinômio é escrito acima do outro. Neste caso, é preciso alinhar em uma mesma coluna os monômios de mesma potência da variável. Para isso, precisamos deixar espaços em branco (ou equivalentemente, preenchidos com zeros), como mostrado abaixo:

$$\begin{array}{cccccccc} & & x^5 & -3ix^4 & +(2+i)x^3 & & & +7 \\ + & -x^7 & +6x^5 & & -3x^3 & & +2x & -1 \\ \hline & -x^7 & +7x^5 & -3ix^4 & +(-1+i)x^3 & & +2x & +6 \end{array}$$

Continuando, calcularemos agora $f(x) + h(x)$ seguindo os mesmo passos acima. Novamente, exemplificaremos ambos os métodos. Por um lado, $f(x) + h(x)$ é o mesmo que

$$(x^5 - 3ix^4 + (2+i)x^3 + 7) + (-x^5 - 13ix^3 + 10x^2 - x).$$

Reordenando os monômios em potências decrescentes de x, ficamos com:

$$x^5 - x^5 - 3ix^4 + (2+i)x^3 - 13ix^3 + 10x^2 - x + 7$$

Agora, colocamos os monômios repetidos em evidência:

$$(1-1)x^5 - 3ix^4 + ((2+i) - 13i)x^3 + 10x^2 - x + 7.$$

Veja que $0x^5 = 0$ para todo x, logo, o monômio x^5 pode ser removido. Dessa forma:

$$f(x) + h(x) = -3ix^4 + (2-12i)x^3 + 10x^2 - x + 7.$$

Alternativamente, montando o dispositivo prático, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} & x^5 & -3ix^4 & +(2+i)x^3 & & & +7 \\ + & -x^5 & & -13ix^3 & +10x^2 & -x & \\ \hline & & -3ix^4 & +(2-12i)x^3 & +10x^2 & -x & +7 \end{array}.$$

$\square$

A subtração é feita de forma análoga: monômio por monômio.

Exemplo 2. *Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ os mesmos polinômios do Exemplo 1. Calcule os valores de $h(x)-f(x)$ e $g(x)-h(x)$.*

Solução. Temos que $h(x) - f(x)$ é igual a:

$$(-x^5 - 13ix^3 + 10x^2 - x) - (x^5 - 3ix^4 + (2+i)x^3 + 7).$$

Subtrair $f(x)$ é o mesmo que somar $-f(x)$ (o oposto de $f(x)$). Assim, a expressão acima é o mesmo que:

$$(-x^5 - 13ix^3 + 10x^2 - x) + (-x^5 + 3ix^4 - (2+i)x^3 - 7).$$

Ordenando os monômios e realizando as somas dos coeficientes, obtemos:

$$\begin{aligned} &- x^5 - x^5 + 3ix^4 + (-13i - (2+i))x^3 + 10x^2 - x - 7 = \\ &\qquad = -2x^5 + 3ix^4 + (-2 - 14i)x^3 + 10x^2 - x - 7. \end{aligned}$$

Ao realizar subtrações, devemos tomar bastante cuidado para não nos confundirmos ao manipular os sinais dos coeficientes. Na primeira equação do exemplo anterior, o sinal de "$-$" está sendo aplicado a todo o polinômio. Para que isso fique claro, o uso dos parênteses é crucial. Em seguida, usamos a propriedade distributiva para inverter o sinal de cada um dos monômios de $f(x)$. Assim, subtrair um polinômio $f(x)$ é o mesmo que somar o oposto de $f(x)$, ou seja, o polinômio $-f(x)$. Pensar dessa forma facilita a montagem de um dispositivo vertical para realizar a subtração (com um polinômio acima do outro), reduzindo as chances de erros. Assim é que, no dispositivo abaixo, primeiro invertemos o sinal de cada um dos coeficientes de $f(x)$ e depois realizamos uma soma:

$$\begin{array}{crrrrrr} & -x^5 & & -13ix^3 & +10x^2 & -x & \\ + & -x^5 & +3ix^4 & -(2+i)x^3 & & & -7 \\ \hline & -2x^5 & +3ix^4 & +(-2-14i)x^3 & +10x^2 & -x & -7. \end{array}$$

Veja ainda que, como os coeficientes são números complexos, vários deles são formados por uma parte real e uma parte imaginária não nulas. Assim, um monômio como $-(2+i)x^3$

também pode ser expresso na forma $+(-2-i)x^3$. Veja que o sinal "$-$" se aplica tando à parte real como à parte imaginária; portanto, esse monômio é diferente do monômio $(-2+i)x^3$ que também é diferente de $-2-ix^3$. Esta última expressão é formada, na verdade, pelo monômio $-ix^3$ e um termo independente, -2.

Para finalizar, calculamos $g(x) - h(x)$:

$$\begin{aligned}(-x^7+6x^5-3x^3+2x-1)-(-x^5-13ix^3+10x^2-x) &= \\ = (-x^7+6x^5-3x^3+2x-1)+(x^5+13ix^3-10x^2+x) & \\ = -x^7+7x^5+(-3+13i)x^3-10x^2+3x-1. &\end{aligned}$$

$\square$

Observe que a soma (e a diferença) de duas funções polinomiais sempre tem como resultado uma função também polinomial. Por outro lado, o *grau do polinômio resultante é menor ou igual ao máximo dos graus dos polinômios que estão sendo adicionados* (*ou subtraídos*).

$$\mathrm{grau}(f(x)+g(x)) \leq \max\{\mathrm{grau}(f(x)), \mathrm{grau}(g(x))\}.$$

2 Produto de funções polinomiais complexas

Em relação ao produto, vamos começar com o caso mais simples, a multiplicação de um polinômio por um único número complexo (ou seja, por uma função polinomial constante). Para fazer isso, basta multiplicar cada monômio pela constante escolhida. Assim, repare que cada uma dessas multiplicações é, essencialmente, o produto de dois números complexos (veja o Módulo "Números Complexos - Forma Algébrica" caso queira revisar esses conceitos).

Exemplo 3. *São dadas $f, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções polinomiais complexas tais que:*

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1,$$
$$h(x) = x + 5i.$$

Calcule os valores de $3\,f(x)$ *e de* $-i\,h(x)$

Solução. Claramente, temos que

$$\begin{aligned} 3\,f(x) &= 3\,(x^3 - 2x^2 + 1) \\ &= 3x^3 - 6x^2 + 3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -i\,h(x) &= -i(x + 5i) \\ &= -ix - 5i^2 \\ &= -ix + 5. \end{aligned}$$

□

Para multiplicar dois polinômios em geral, multiplicamos cada monômio de um deles por todos os monômios do outro. Em seguida, somamos todos os monômios resultantes, como sempre, tomando o cuidado de agrupar monômios de acordo com o expoente da variável. Assim como com números reais, em uma multiplicação de polinômios os polinômios que estão sendo multiplicados são os *fatores* e o resultado é o *produto*.

Exemplo 4. *Sejam* f *e* h *os polinômios indicados no Exemplo 3, e* $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $g(x) = x^2 + 3x - 2$*. Calcule os valores dos produtos* $f(x) \cdot g(x)$ *e* $g(x) \cdot h(x)$*.*

Solução. Começaremos calculando

$$f(x) \cdot g(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)(x^2 + 3x - 2).$$

Multiplicamos o primeiro monômio de $f(x)$, ou seja, x^3, por cada monômio de $g(x)$; depois multiplicamos o segundo monômio de $f(x)$, ou seja $-2x^2$ (não esqueça do sinal), por cada monômio de $g(x)$; por fim multiplicamos o termo independente de $f(x)$ por cada monômio de $g(x)$. Lembre-se de que, ao multiplicar dois monômios, devemos somar os expoentes da variável (x) e multiplicar os coeficientes. Assim, obtemos:

$$(x^5 + 3x^4 - 2x^3) + (-2x^4 - 6x^3 + 4x^2) + (x^2 + 3x - 2). \tag{1}$$

Agora, basta realizar a soma acima, agrupando os monômios cujas partes literais possuem um mesmo expoente:

$$\begin{aligned} &x^5 + 3x^4 - 2x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 4x^2 + x^2 + 3x - 2 = \\ &\qquad\qquad = x^5 + x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 3x - 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) \cdot g(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 3x - 2.$$

A soma em (1) também pode ser realizada verticalmente, reservando uma coluna para cada expoente da variável x. Dessa maneira, temos um dispositivo para realizar produtos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & x^2 & +3x & -2 \\ \times & & & x^3 & -2x^2 & & +1 \\ \hline & & & & x^2 & +3x & -2 \\ & & -2x^4 & -6x^3 & +4x^2 & & \\ + & x^5 & +3x^4 & -2x^3 & & & \\ \hline & x^5 & +x^4 & -8x^3 & +5x^2 & +3x & -2 \end{array}$$

Vamos, agora, calcular o outro produto, $g(x) \cdot h(x)$, usando as mesmas técnicas. Temos que:

$$\begin{aligned} g(x) \cdot h(x) &= (x^2 + 3x - 2)(x + 5i) \\ &= (x^3 + 5ix^2) + (3x^2 + 15ix) + (-2x - 10i) \\ &= x^3 + (5i + 3)x^2 + (15i - 2)x - 10i. \end{aligned}$$

Observe que, nos cálculos acima, multiplicamos cada um dos monômios de $g(x)$ pelo polinômio $h(x)$. A distributividade também pode ser executada na ordem oposta, multiplicando cada monômio de $h(x)$ pelo polinômio $g(x)$. O resultado final será o mesmo:

$$\begin{aligned} g(x)\cdot h(x) &= (x^2+3x-2)(x+5i) \\ &= (x^3+3x^2-2x)+(5ix^2+15ix-10i) \\ &= x^3+(3+5i)x^2+(-2+15i)x-10i. \end{aligned}$$

Perceba a primeira maneiras corresponde a montar o dispositivo de multiplicação com $h(x)$ acima de $g(x)$, ao passo que a segunda maneira corresponde a colocar $g(x)$ acima de $h(x)$. Em ambos os casos, precisaremos calcular a mesma quantidade de monômios, mas costuma-se "gastar menos espaço no papel" quando se coloca o polinômio de menor grau embaixo:

$$\begin{array}{cccccc} & & x^2 & +3x & -2 \\ \times & & & x & +5i \\ \hline & & 5ix^2 & +15ix & -10i \\ + & x^3 & +3x^2 & -2x & \\ \hline & x^3 & +(5i+3)x^2 & +(15i-2)x & -10i \end{array}. \qquad \square$$

Observe que o produto de dois polinômios é sempre um polinômio. Além disso, *o grau do produto é igual à soma dos graus dos fatores*:

$$\text{grau}(f(x)\cdot g(x)) = \text{grau}(f(x)) + \text{grau}(g(x)).$$

(Por outro lado, ao dividir um polinômio por outro, a função resultante pode não ser um polinômio.)

Exemplo 5. *Sejam $f(x)=2x-3$, $g(x)=-4-x$ e $h(x)=x^2-x+1$. Calcule os coeficientes de $p(x)$, sabendo que $p(x)=f(x)\,g(x)+h(x)$.*

Solução. Basta calcular primeiramente o produto $f(x)g(x)$ e, em seguida, somar o resultado a $h(x)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x-3)(-4-x)+(x^2-x+1) \\ &= (-8x-2x^2+12+3x)+(x^2-x+1) \\ &= -2x^2+x^2-8x+3x-x+12+1 \\ &= -x^2-6x+13. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 6. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ tais que*

$$f(x) = ax^2 + (b-1)x + 3 \quad e \quad g(x) = bx^2 + (-a+2)x - 1.$$

Encontre os valores das constantes a e b de modo que $f(x) + g(x)$ seja independente de x.

Solução. Note que

$$f(x) + g(x) = (a+b)x^2 + (b-a+1)x + 2.$$

Para que o valor de $f(x) + g(x)$ não dependa de x, é necessário que todos os seus coeficientes, com exceção do termo independente, sejam iguais a zero. Assim,

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b - a + 1 = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos que $2b + 1 = 0$, logo, $b = -1/2$. Substituindo o valor de b na primeira equação do sistema, obtemos $a = 1/2$. $\square$

Exemplo 7. *Sejam $f(x) = ix$ e $g(x) = 3x + 2i$. Calcule os valores de b e c que verificam a igualdade:*

$$f(x) \cdot g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Solução. Comecemos calculando $f(x) \cdot g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= ix(3x + 2i) \\ &= 3ix^2 + 2i^2x = 3ix^2 - 2x. \end{aligned}$$

Então, comparando os coeficientes em $f(x) \cdot g(x)$ com aqueles em $ax^2 + bx + c$, concluímos que $a = 3i$, $b = -2$, $c = 0$.

$\square$

Dicas para o Professor

Caso os alunos já tenham familiaridade com a soma de polinômios com coeficientes reais, o conteúdo desta aula pode ser apresentado de forma bastante breve. Nessa eventualidade, o professor pode aproveitar o tempo de aula revisando exercícios do módulo de adição de números complexos e ressaltando o modo como a forma algébrica desses números deve ser associada a cada monômio. Seja como for, sugerimos um encontro de 50 minutos para cobrir o conteúdo deste material.

As referências a seguir contêm muito mais sobre polinômios.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios, Equações.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.