Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Geométrica

Potenciação de números complexos no plano de Argand-Gauss

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

17 de outubro de 2020

1 Interpretação geométrica da potenciação em forma polar

Já estudamos como realizar multiplicação e divisão de complexos, tanto na forma algébrica como na forma polar. A seguir veremos que a maneira mais simples de lidar com a potenciação (por expoentes inteiros) é aplicando a forma polar. O método que utilizaremos é consequência direta de como calculamos produtos e divisões.

Seja z um complexo não nulo e n um inteiro. Precisamos lembrar qual o significado da potência z^n. Para $n = 0$ definimos $z^0 = 1$ (para qualquer $z \neq 0$); para $n = 1$, definimos $z^1 = z$; e para $n > 1$ temos que

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ vezes}},$$

o produto de n fatores iguais a z. Agora, para $n < 0$, tomamos $m = -n > 0$ e definimos:

$$z^n = z^{-m} = \left(\frac{1}{z}\right)^m .$$

Por exemplo, se $n = -3$, então $m = 3$ e

$$z^{-3} = \left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z}.$$

Vamos precisar lembrar também que $\operatorname{cis}(\theta)$ é uma abreviação para $\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ e que a forma polar de um complexo $z \neq 0$ é dada por $z = r \operatorname{cis}(\theta)$, onde $r = |z|$ é o módulo de z e θ é seu argumento.

Teorema 1. *Se $z = r \operatorname{cis}(\theta)$ é um complexo não nulo em forma polar e n é um inteiro, então*

$$\boxed{z^n = r^n \cdot \operatorname{cis}(n\theta).} \tag{1}$$

Prova. Para $n = 0$, temos que $r^0 = 1$ (pois $r \neq 0$) e

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}(0 \cdot \theta) &= \operatorname{cis}(0) = \cos(0) + i \operatorname{sen}(0)\\ &= 1 + i \cdot 0 = 1 + 0\\ &= 1\end{aligned}$$

Logo, o teorema afirma que $z^0 = r^0 \cdot \operatorname{cis}(0) = 1 \cdot 1 = 1$, o que é coerente com a definição de z^0.

Para $n = 1$ a fórmula é óbvia, uma vez que $r^1 = r$ e $1 \cdot \theta = \theta$, segue que $z = r^1 \operatorname{cis}(1 \cdot \theta)$.

Suponha, agora, que $n > 1$. Usando a fórmula para multiplicação de números complexos (estudada na aula anterior), temos:

$$\begin{aligned}z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ vezes}}\\ &= \underbrace{r \operatorname{cis}(\theta) \cdot \ldots \cdot r \operatorname{cis}(\theta)}_{n \text{ vezes}}\\ &= \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ vezes}} \cdot \operatorname{cis}\Big(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ vezes}}\Big)\\ &= r^n \cdot \operatorname{cis}(n\theta).\end{aligned}$$

Por fim, para o caso $n < 0$, usaremos da aula passada que

$$\frac{1}{z} = r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta).$$

Então, sendo $m = -n > 0$, segue da definição de z^n e do caso anterior que

$$\begin{aligned}z^n &= \left(\frac{1}{z}\right)^m\\ &= (r^{-1} \cdot \operatorname{cis}(-\theta))^m\\ &= (r^{-1})^m \cdot \operatorname{cis}(m(-\theta))\\ &= r^{-m} \cdot \operatorname{cis}(-m\theta))\\ &= r^n \cdot \operatorname{cis}(n\theta),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

A fórmula (1) é conhecida como a *Primeira Fórmula de de Moivre*, em homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754).

Exemplo 2. *Calcule* $(1 + i\sqrt{3})^{20}$.

Solução. Desenvolver a expressão acima usando o binômio de Newton seria extremamente trabalhoso, uma vez que teríamos de calcular todos os números binomiais $\binom{20}{k}$, com k variando de 0 a 20.

Ao invés de fazer isso, converteremos o número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$ para a forma polar e, em seguida, calcularemos z^{20} com o auxílio da Primeira Fórmula de de Moivre.

Começamos calculando $|z|$ e o argumento de z. Temos que $z = a + bi$ onde $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$. Logo,

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2,$$

e seu argumento é o ângulo θ que satisfaz:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Escolhendo θ de $0°$ a $360°$, vemos que $\theta = 60°$.

Assim, $z = 2\operatorname{cis} 60°$, e segue de (1) que

$$\begin{aligned} z^{20} &= \big(2(\operatorname{cis} 60°)\big)^{20} \\ &= 2^{20}\operatorname{cis}(20 \cdot 60°) \\ &= 2^{20}(\cos 1200° + i \operatorname{sen} 1200°). \end{aligned}$$

Agora, basta encontrar a menor determinação positiva do ângulo $1200°$ (ou seja, reduzi-lo a um ângulo entre 0 e 360 graus). Dividindo 1200 por 360 encontramos o quociente 3 e resto 120 (temos $1200 = 3 \cdot 360 + 120$). Logo,

$$\begin{aligned} z^{20} &= 2^{20}(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \\ &= 2^{20}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2^{19}(-1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Calcule o valor de* $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{2}i\right)^2$.

Solução 1. No caso em que o valor do expoente é pequeno, também é simples calcular o valor da potência diretamente pela forma algébrica. Aqui, usaremos o produto notável $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$. Temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{2}i\right)^2 &= \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2}i + \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}i\right)^2\\ &= \frac{81\cdot 2}{4}+\frac{2\cdot 81\cdot 2}{4}i+\frac{81\cdot 2}{4}\cdot(-1)\\ &= 81i.\end{aligned}$$

□

Solução 2. Uma solução análoga à do exemplo anterior também pode ser dada. Para tanto, veja que

$$z = \frac{9\sqrt{2}}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{2}i = 9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),$$

e que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}(45^\circ) = \cos(45^\circ)$. Logo, a forma polar de z é $z = 9\operatorname{cis}(45^\circ)$, de sorte que (graças a (1))

$$z^2 = 9^2\cdot\operatorname{cis}(2\cdot 45^\circ) = 81\operatorname{cis}(90^\circ) = 81i.$$

Na última igualdade usamos que

$$\operatorname{cis}(90^\circ) = \cos(90^\circ) + i\operatorname{sen}(90^\circ) = 0 + i\cdot 1 = i.$$

□

Exemplo 4. *Se* $z = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, *calcule o valor de*

$$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{12}.$$

Solução. Observe que os termos $z, z^2, z^3, \ldots, z^{12}$ formam uma progressão geométrica (PG), com razão $q = z \neq 0$, primeiro termo $a_1 = z$ e $n = 12$ termos. Sendo S a soma dos elementos dessa PG, podemos usar a fórmula:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{z(z^{12} - 1)}{z - 1} \\ &= \frac{z^{13} - z}{z - 1}. \end{aligned}$$

Para calcular o último valor acima, precisamos calcular primeiramente z^{13}. Assim como no exemplo anterior, faremos isso através da forma polar de z.

Observe que z já está numa forma adequada, pois $\sqrt{3}/2 = \cos 30°$ e $1/2 = \operatorname{sen} 30°$; assim,

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos(30°) + \operatorname{sen}(30°).$$

Por outro lado, este z possui módulo igual a 1, uma vez que $\sqrt{\cos^2(30°) + \operatorname{sen}^2(30°)} = 1$. Agora, aplicamos a Primeira Fórmula de de Moivre, obtendo:

$$\begin{aligned} z^{13} &= \cos(13 \cdot 30°) + i \operatorname{sen}(13 \cdot 30°) \\ &= \cos(390°) + i \operatorname{sen}(390°). \end{aligned}$$

Por fim, como $13 \cdot 30° = 390° = 360° + 30°$, concluímos que $30°$ é a menor denominação positiva de $390°$. Portanto,

$$\cos(390°) = \cos(30°) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(390°) = \operatorname{sen}(30°)$$

e, daí,

$$z^{13} = \cos(30°) + i \operatorname{sen}(30°) = z.$$

Os cálculos acima mostraram que $z^{13} = z$. Substituindo essa informação na expressão anteriormente obtida para S, obtemos

$$S = \frac{z^{13} - z}{z - 1} = \frac{z - z}{z - 1} = \frac{0}{z - 1} = 0.$$

□

Observação 5. *É interessante observar que, no exemplo anterior, que cada um dos complexos* $z, z^2, \ldots, z^{12}$ *satisfaz a equação* $x^{12} = 1$*. Por isso, cada um deles é denominado uma raiz* 12*-ésima da unidade. Na aula seguinte, estudaremos mais sobre raízes da unidade.*

Exemplo 6. *Calcule* $|(1+2i)^4|$*.*

Solução. Seja $z = 1 + 2i$. Neste exemplo, está sendo pedido para calcular apenas *o módulo* do complexo z^4, de forma que não é necessário calcular o próprio z^4.

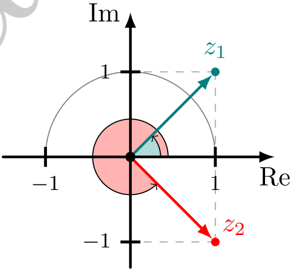
Pela Fórmula de Moivre (Teorema 2), temos que $|z^4| = |z|^4$. Também, veja que $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Logo,

$$|z^4| = (\sqrt{5})^4 = 5^2 = 25.$$

□

Exemplo 7. *Encontre todos os possíveis valores inteiros* n *para os quais* $(1+i)^n = (1-i)^n$*.*

Solução. Começaremos escrevendo os complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ na forma polar. Poderíamos fazer isso usando as mesmas fórmulas que foram usadas no Teorema 2. Entretanto, para esses números também é fácil obter seus módulos e argumentos observando suas posições no plano de Argand-Gauss. De fato (acompanhe na figura a seguir), ambos são diagonais de quadrados de lado 1, logo, $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$.



Além disso, o segmento de z_1 à origem forma um ângulo de 45°, ou seja, $\pi/4$ radianos, com o eixo real. Este é seu argumento, já que o sentido positivo para medir arcos é o sentido anti-horário. Por sua vez, o argumento de z_2 é $-\pi/4$. Por conseguinte,

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \Big(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \Big),$$
$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i \operatorname{sen}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) \Big).$$

Queremos encontrar os inteiros n tais que $z_1^n = z_2^n$. Tendo em vista as formas polares de z_1 e z_2, a Primeira Fórmula de de Moivre garante que essa igualdade equivale a:

$$(\sqrt{2})^n \Big(\cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) + i \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) \Big) =$$
$$= (\sqrt{2})^n \Big(\cos\Big(-\frac{\pi n}{4}\Big) + i \operatorname{sen}\Big(-\frac{\pi n}{4}\Big) \Big).$$

Podemos dividir ambos os lados por $(\sqrt{2})^n$ a fim de simplificar a equação:

$$\cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) + i \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) = \cos\Big(-\frac{\pi n}{4}\Big) + i \operatorname{sen}\Big(-\frac{\pi n}{4}\Big).$$

Em seguida, observe que a função cosseno é par, ou seja, satisfaz $\cos(-x) = \cos(x)$ para qualquer x, enquanto a função seno é ímpar, ou seja, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ para todo x. (Para detalhes, veja a aula "Seno, Cosseno e Tangente" do Módulo "Circulo Trigonométrico"). Dessa forma, a equação anterior equivale a:

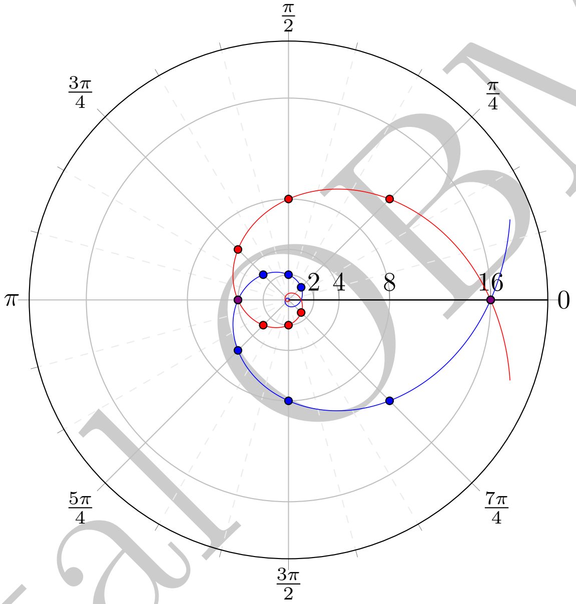
$$\cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) + i \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) - i \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi n}{4}\Big),$$

que por sua vez é o mesmo que

$$2i \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) = 0,$$

ou seja, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right) = 0$. Isso acontece precisamente quando $\frac{\pi n}{4} = \pi k$, para algum valor inteiro k. Com isso, $n = 4k$ onde k é inteiro. A interpretação desse fato é que a igualdade do enunciado, $(1+i)^n = (1-i)^n$, é realizada se e, somente se, n é um múltiplo de 4. Veja que k e, consequentemente, n, pode ser positivo, nulo ou negativo. $\square$

A figura a seguir traz uma interpretação geométrica do resultado do Exemplo 7. Os pontos destacados sobre a curva azul são algumas das potências de $z_1 = 1 + i$ com expoentes inteiros e positivos (veja que o enunciado não exige que o expoente seja positivo, mas os pontos que correspondem a expoentes negativos são muito próximos da origem e não são possíveis de visualizar na escala desta figura). Da mesma forma, os pontos sobre a curva vermelha são algumas das potências de $z_2 = 1 - i$ com expoentes positivos.



Observe que z_1 é o conjugado complexo de z_2 e, consequentemente, para todo n temos que z_1^n é o conjugado de z_2^n. Dessa forma, as potências de z_2 são obtidas pela reflexão das potências de z_1 em torno do eixo real (pense no eixo real como um espelho). Para que $z_1^n = z_2^n$ é necessário e suficiente que eles estejam sobre o eixo real (ou seja, sejam número reais). Isso acontece quando o argumento de z_1^n (e, consequentemente, o de z_2^n) é um múltiplo inteiro de π. Como o argumento das potências $z_1^0, z_1, z_1^2, z_1^3, \ldots$ varia sempre em

$\pi/4$ radianos de uma potência para a seguinte, e $z_1^0 = 1$ está sobre o eixo real, a cada 4 passos temos uma potência que cai novamente sobre o eixo-real.

Dicas para o Professor

Lembre-se de que na segunda aula do Módulo "Forma algébrica dos números complexos" já havíamos abordado como calcular as potências do número i. Este é um caso bastante importante de potenciação, que também pode ser revisado antes de fazer essa aula. O conteúdo da aula atual é consequência direta das aulas anteriores e também um prelúdio para a aula seguinte, sobre radiciação de números complexos. Ele pode ser trabalhado de forma isolada, em um encontro de 50 minutos, mas sugerimos que ela seja feita em conjunto com as aulas anteriores e/ou com a seguinte.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.