Material Teórico - Módulo de Frações, O Primeiro Contato

Frações e Suas Operações - Parte 3

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Ulisses Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

19 de outubro de 2025

Portal da Matemática
OBMEP

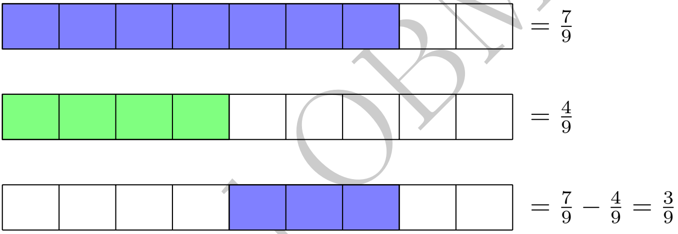
Neste material, continuamos o estudo das operações aritméticas com frações, agora apresentando a subtração.

1 Subtração de frações

Iniciamos com o seguinte

Exemplo 1. *Gabi e Nando ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Eles comeram, juntos, $\frac{7}{9}$ da barra. Se $\frac{4}{9}$ foi a fração da barra comida por Gabi, que fração corresponde à parte comida por Nando?*

Solução. Observe a figura, onde estão representadas a barra, dividida em nove partes iguais, e as frações comidas pelos irmãos juntos e por Gabi sozinha.



Na barra de cima, estão pintadas de azul sete das nove partes, representando os $\frac{7}{9}$ da barra comidos por por Gabi e Nando, juntos. Na barra do meio, estão pintadas de verde quatro das sete partes, representando os $\frac{4}{9}$ da barra comidos por Gabi; na barra de baixo, subtraímos a parte comida somente por Gabi da parte comida pelos dois juntos para obter a parte da barra correspondente à fração comida por Nando. Desse modo, a operação com frações representada pelas barras é a seguinte:

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

ou seja, Nando comeu, sozinho, $\frac{1}{3}$ da barra de chocolate. $\square$

De modo geral, para realizar uma subtração de frações quando as frações envolvidas têm um mesmo denominador, procedemos como descrito a seguir.

Subtração de frações com um mesmo denominador: a diferença de duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a diferença dos numeradores das duas frações e cujo denominador é o mesmo denominador (comum) das duas frações.

Em símbolos, podemos reescrever a regra acima da seguinte forma:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Para exercitar, vejamos mais alguns exemplos:

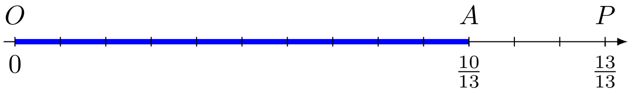
$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{3} = \frac{3}{7}.$$

$$\frac{11}{15} - \frac{4}{15} = \frac{11-4}{15} = \frac{7}{15}.$$

$$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} = \frac{9-4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2. *Amauri percorrera $\frac{10}{13}$ do trajeto de sua casa até a faculdade, quando percebeu que tinha esquecido o livro de Álgebra Linear em casa. Após voltar $\frac{4}{13}$ desse mesmo trajeto, encontrou com o seu pai, que já percebera o esquecimento e resolvera ir até a faculdade entregar o livro ao filho. Que fração do trajeto, da casa de Amauri até a faculdade, o pai já percorrera quando os dois se encontraram?*

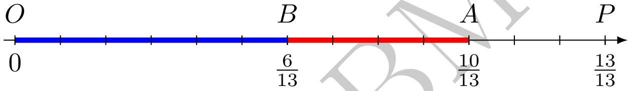
Solução. Observe a reta numérica abaixo:



O segmento OP representa o trajeto da casa de Amauri até a faculdade, tendo sido dividido em 13 partes iguais. Desse modo, cada uma dessas 13 partes representa $\frac{1}{13}$ do trajeto.

O ponto A representa o ponto onde Amauri percebeu que tinha esquecido o livro, ou seja, o segmento OA corresponde ao trecho que Amauri percorreu até o ponto em que percebeu o esquecimento do livro, que corresponde $\frac{10}{13}$ do trajeto de sua casa à faculdade.

Na próxima figura, o ponto B representa o ponto de encontro de Amauri com o seu pai, ou seja, o segmento AB representa o trecho que Amauri percorreu de volta, desde o ponto em que percebeu o esquecimento até o encontro com seu pai, e que corresponde a $\frac{4}{13}$ do percurso total.



Portanto,

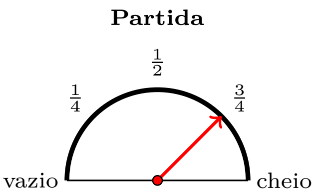
$$\frac{10}{13} - \frac{4}{13} = \frac{10-4}{13} = \frac{6}{13},$$

ou seja, o encontro entre Amauri e seu pai aconteceu quando o pai tinha percorrido $\frac{6}{13}$ do trajeto de casa até a faculdade. $\square$

Agora, vejamos alguns exemplos que ilustram a subtração de frações que não possuem denominadores iguais.

Exemplo 3 (CMF - adaptada). *No painel de um automóvel há um marcador que indica a quantidade de combustível no tanque. Através de um ponteiro, o marcador indica a fração de combustível existente no tanque em relação à capacidade máxima. Quando o ponteiro aponta para a posição* ***cheio****, isso significa que o tanque está completamente cheio de combustível.*

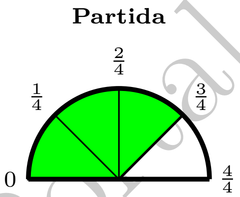
As figuras abaixo representam o marcador de combustível no momento da partida e no momento da chegada de uma viagem. Que fração do tanque de combustível foi utilizada na viagem?



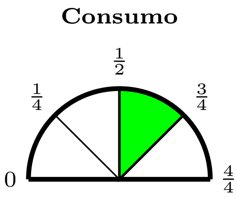
Solução. Veja que, no momento da partida, o tanque estava com $\frac{3}{4}$ de sua capacidade e, na chegada, estava com $\frac{1}{2}$ de sua capacidade. Assim, a fração que representa o total de gasolina gasto na viagem é dada pela diferença

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}.$$

Na figura abaixo, cada semicírculo representa o tanque cheio de combustível, tendo sido dividido em quatro partes iguais. À esquerda, temos a representação do tanque no momento da partida e à direita temos a representação do tanque no momento da chegada.



Com o auxílio da figura acima, a fração do tanque utilizada durante a viagem pode ser facilmente calculada. Essa fração está ilustrada na figura abaixo.



Portanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

é a fração do tanque de combustível utilizada na viagem. $\square$

Exemplo 4. *Em um passeio ciclístico, os participantes tinham percorrido $\frac{3}{4}$ do percurso total quando pararam em um ponto de apoio. Enquanto estavam parados, receberam a notícia de que a bicicleta de Joaquim, um dos participantes, estava com um pneu furado; então, retornaram $\frac{1}{5}$ do percurso total para socorrê-lo. Que fração do percurso total do passeio Joaquim havia percorrido até que o pneu da sua bicicleta furou?*

(a) $\frac{2}{5}$.

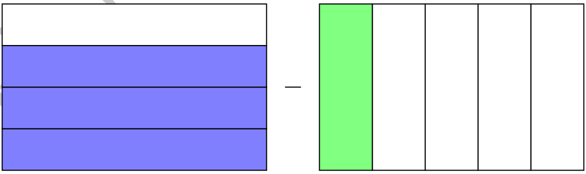
(b) $\frac{11}{20}$.

(c) $\frac{9}{20}$.

(d) $\frac{2}{9}$.

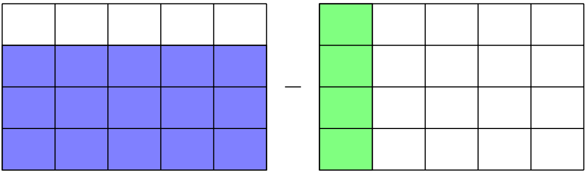
Solução. Precisamos subtrair as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$; realmente, a primeira representa a fração do trajeto total percorrida até os participantes saberem do problema na bicicleta de Joaquim, enquanto a segunda representa a fração do trajeto que os participantes tiveram de retornar para socorrê-lo.

Observe a figura a seguir, que representa a subtração das frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$:



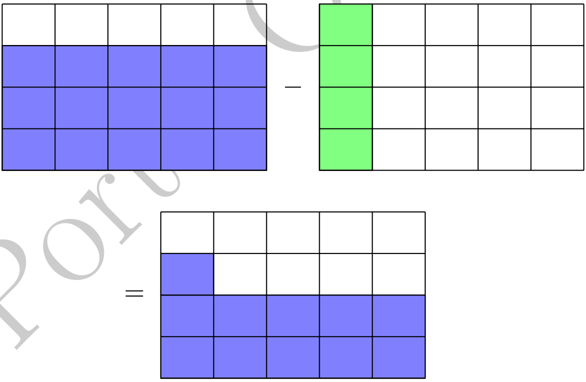
Não há como subtrair as frações diretamente, pois o retângulo, que representa todo o trajeto percorrido pelos ciclistas, foi dividido em 4 partes iguais na figura da esquerda e em 5 partes iguais na figura da direita.

Entretanto, subdividindo cada $\frac{1}{4}$ da figura da esquerda em 5 partes iguais e cada $\frac{1}{5}$ da figura da direita em 4 partes iguais, podemos representar as mesmas frações que foram representadas acima de uma maneira que torna simples subtraí-las:



De fato, agora cada retângulo maior se encontra dividido em 20 partes iguais; no retângulo maior da esquerda, as 3 partes azuis (das quatro que tínhamos) agora correspondem a 15 partes azuis menores (em símbolos, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{15}{20}$ são **equivalentes**); da mesma forma, o retângulo da direita representa a equivalência entre as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{20}$.

Agora, é fácil efetuar a subtração das frações $\frac{15}{20}$ e $\frac{4}{20}$, pois são frações de um inteiro que foi dividido em uma mesma quantidade de partes, ou seja, são frações que possuem um mesmo denominador.



Logo,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{20}.$$

□

De modo geral, quando as frações que queremos subtrair não têm denominadores iguais, procedemos da seguinte forma:

Subtração de frações com denominadores diferentes: para subtrair duas frações que têm denominadores diferentes, procedemos em duas etapas: (1) encontramos duas frações que possuam um mesmo denominador e que sejam equivalentes às frações que desejamos subtrair; (2) subtraímos as frações equivalentes (que, agora, têm denominadores iguais), subtraindo seus numeradores.

Observação 5. *O procedimento utilizado para subtrair duas frações é inteiramente análogo ao que foi utilizado para somar duas frações. A única diferença nos procedimentos é que, no caso da subtração de frações, subtraímos os numeradores em vez de somá-los. Além disso, a principal diferença reside na interpretação dos problemas. Tente perceber as diferentes interpretações voltando ao problema do passeio ciclístico que foi apresentado no material anterior, que trata da adição de frações.*

A mesma observação feita no caso da adição de frações vale para a subtração: para executar a etapa (1) acima, precisamos trocar as frações originais por *frações equivalentes a elas e que possuam um mesmo denominador*. Em símbolos,

$$\text{trocamos } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \text{ por } \frac{a \times k}{b \times k} - \frac{c \times l}{d \times l},$$

com $a \times k = d \times l$.

Como $a \times k$ é múltiplo de a e $d \times l$ é múltiplo de l, o que queremos é que o denominador comum das frações equivalentes seja um múltiplo dos denominadores das frações originais.

Esse múltiplo comum pode ser o mmc ou o produto dos denominadores das frações originais, e foi exatamente o que fizemos nos exemplos anteriores:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 1} - \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

e

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{3\times 5}{4\times 5}-\frac{1\times 4}{5\times 4}=\frac{15}{10}-\frac{4}{20}=\frac{15-4}{20}=\frac{11}{20}.$$

Vejamos um último exemplo, que relaciona a adição e a subtração de frações.

Exemplo 6 (CMF - adaptado). *Na realização de um trabalho escolar, que foi concluído num determinado número de dias, os alunos organizaram-se da seguinte forma:*

- $\frac{3}{10}$ *dos dias foram destinados à pesquisa;*
- *metade dos dias foi utilizada para a organização das informações pesquisadas;*
- *os* 8 *dias restantes foram destinados à finalização do trabalho.*

Em quantos dias os alunos realizaram o trabalho?

(*a*) 32.

(*b*) 40.

(*c*) 57.

(*d*) 71.

(*e*) 79.

Solução. Inicialmente, sabemos que $\frac{3}{10}$ dos dias foram destinados à pesquisa e $\frac{1}{2}$ dos dias foram utilizados para a organização das informações; somando essas duas frações do total de dias, obtemos:

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Agora, calculemos a fração que corresponde aos 8 dias utilizados para a finalização do trabalho, depois de realizadas as etapas de pesquisa e organização das informações. Essa fração é a diferença entre a fração que representa o trabalho inteiro e a soma das frações que representam as etapas de pesquisa e organização das informações, que calculamos acima.

Como o resultado da soma foi $\frac{4}{5}$, podemos dividir o trabalho completo em cinco partes iguais, sendo que 4 dessas partes foram utilizadas nas duas primairas etapas. Assim, a fração que representa os 8 dias utilizados para finalizar o trabalho corresponde à diferença

$$\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Por fim, como $\frac{1}{5}$ do trabalho total corresponde a 8 dias, o trabalho completo, representado pela fração $\frac{5}{5}$ foi realizado em $5 \times 8 = 40$ dias. $\square$

Sugestões para o Professor

Como ressaltamos na observação 5, os procedimentos para efetuar uma adição e uma subtração de frações são análogos, mudando apenas as operações que devem ser realizadas com os numeradores das frações.

Optamos por uma abordagem a partir da resolução de problemas para que os alunos possam perceber quando uma ou outra operação deve ser utilizada. Nesse sentido, recomendamos que seja feita uma comparação entre os problemas do passeio ciclístico, nessa parte e na parte anterior.

Um encontro de 50 minutos deve ser suficiente para cobrir o conteúdo deste material.