

Material Teórico - Módulo Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Divisão de funções polinomiais (complexas)

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de março de 2021



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Divisão de funções polinomiais complexas

Após aprender a *multiplicar*, é natural nos perguntarmos como *dividir* polinômios. A operação de divisão é, naturalmente, a inversa da multiplicação. Por exemplo, pelo que vimos no módulo anterior, é possível calcular, usando a propriedade distributiva, que

$$(x^2 - 3x + 7)(x + 1) = x^3 - 2x^2 + 4x + 7.$$

Disso, podemos escrever

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x + 7}{x + 1} = x^2 - 3x + 7,$$

ou, de modo equivalente,

$$(x^3 - 2x^2 + 4x + 7) \div (x + 1) = x^2 - 3x + 7.$$

O método que usaremos no exemplo a seguir não é o mais eficiente (veremos outro melhor ao longo da aula), mas ele ajuda a entender o problema.

Exemplo 1. *Sejam*

$$p(x) = x^5 + 5x^4 + 13x^2 - 9x - 6 \quad e \quad h(x) = x^2 + 3.$$

Calcule o quociente $\frac{p(x)}{h(x)}$.

Solução. Queremos obter um polinômio $q(x)$ que satisfaça:

$$p(x) = h(x) \cdot q(x).$$

Como $p(x)$ possui grau 5 e $h(x)$ possui grau 2, é preciso que o grau de $q(x)$ seja 3 (pois $2 + 3 = 5$). Assim, podemos escrever $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Logo, aplicando a propriedade distributiva obtemos

$$\begin{aligned} h(x) \cdot q(x) &= (x^2 + 3)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2) + (3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d) \\ &= ax^5 + bx^4 + (c + 3a)x^3 + (d + 3b)x^2 + 3cx + 3d. \end{aligned}$$

Como o resultado acima deve ser igual ao polinômio

$$p(x) = 1x^5 + 5x^4 + 0x^3 + 13x^2 - 9x - 6,$$

comparando os coeficientes, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 5, \\ c + 3a = 0, \\ d + 3b = 13, \\ 3c = -9, \\ 3d = -6. \end{cases}$$

Demos sorte de que neste exemplo o sistema é bastante simples: as duas primeiras e as duas últimas equações já nos fornecem os valores $a = 1$, $b = 5$, $c = -3$ e $d = -2$. Entretanto, para garantir que realmente temos uma solução válida, ainda é preciso verificar que esses valores satisfazem as duas equações do meio:

$$c + 3a = -3 + 3 \cdot 1 = -3 + 3 = 0 \quad e$$

$$d + 3b = -2 + 3 \cdot 5 = 13.$$

Com isso, podemos afirmar que

$$q(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2,$$

é o resultado da divisão desejada. \square

Em que pese o exemplo anterior, assim como o resultado da divisão de números naturais pode não resultar em um número natural, o resultado da divisão de dois polinômios pode não resultar em um polinômio. Isso acontece ou quando tentamos dividir um polinômio por outro que possui grau maior, ou quando, ao utilizar o método do exemplo anterior, obtemos um sistema impossível (isto é, que não possui solução). Conforme veremos no restante desta aula, podemos proceder com a divisão se aceitarmos obter um *quociente* e um *resto*.

No caso de números inteiros não negativos já sabemos que toda divisão resulta em um *quociente* e um *resto* (possivelmente igual a zero). Recordemos em um

Exemplo 2. Ao dividir 27 por 4 obtemos como quociente o número 6 e como resto o número 3, já que $27 = 6 \cdot 4 + 3$.

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ -24 & 6 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Em geral, dados números inteiros não negativos a , b , q e r , com $b > 0$, dizemos que a *divisão inteira*¹ de a por b tem quociente q e deixa resto r quando $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < b$. O número a é o *dividendo* e b é o *divisor* dessa operação.

$$a = b \cdot q + r$$

divisor
resto
↖
↖
dividendo
quociente

Para maiores detalhes sobre uma divisão geral entre dois inteiros não negativos, veja a aula “Teorema da Divisão Euclidiana” do módulo “Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana” do Oitavo Ano do Ensino Fundamental.

Com polinômios, temos exatamente a mesma relação. Mais precisamente, dados polinômios $p(x)$ e $d(x)$, a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ resulta em um (polinômio) quociente $q(x)$ e um (polinômio) resto $r(x)$. O resto, se não for nulo, deve possuir grau estritamente menor que o grau do divisor e deve valer a relação:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

divisor
resto
↖
↖
dividendo
quociente

Existe um dispositivo prático para calcular $q(x)$ e $r(x)$ que é muito parecido com aquele utilizado para a divisão

¹Também denominada *divisão com resto* ou *divisão euclidiana*.

de inteiros positivos. Contudo, antes de mostrá-lo, é útil revisarmos os detalhes de uma divisão longa de inteiros.

Exemplo 3. *Realizemos a divisão de 779 por 5. (O passo a passo pode ser acompanhado também na vídeo-aula deste módulo).*

Para armar o dispositivo da divisão, devemos colocar o dividendo, 779, e o divisor, 5, como no diagrama a seguir. A divisão é efetuada tomando a menor quantidade possível de algarismos do dividendo, da esquerda para a direita, tal que possamos dividir este prefixo pelo divisor. Em nosso caso, devemos começar dividindo 7 por 5 e, para tanto, procuramos mentalmente o maior número natural que, multiplicado por 5, não passa de 7.

$$\begin{array}{r|l} \overline{779} & 5 \\ - 5 & 155 \\ \hline 27 & \\ - 25 & \\ \hline 29 & \\ - 25 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Obviamente, tal número é o quociente de 7 por 5, que é igual a 1, pois $1 \times 5 < 7$ e $2 \times 5 > 7$. Este 1 será o primeiro algarismo do quociente de 779 por 5 e deverá ser escrito abaixo do divisor, separado dele pela barra horizontal do dispositivo de divisão. Depois, efetuamos o produto 1×5 e escrevemos o resultado da operação (isto é, 5) abaixo do algarismo 7 do dividendo e realizamos a subtração: $7 - 5 = 2$, conforme indicado no diagrama. Em seguida, “baixamos” o primeiro algarismo não utilizado do dividendo (no caso, 7), colocando-o ao lado do 2 que acabamos de obter.

Agora, repetimos todo o processo: dividimos 27 por 5, obtendo quociente 5, que é escrito abaixo do divisor (à direita do algarismo 1 que havíamos colocado anteriormente)² É fácil

²Observação: há casos em que o quociente dessa divisão é zero; ainda assim, esse zero deve ser escrito abaixo do divisor; depois continuamos o processo, baixando o algarismo seguinte do dividendo.

ver que $5 \times 5 = 25$, o que é escrito abaixo do 27 para podermos efetuar a subtração $27 - 25 = 2$. Agora, baixamos o 9 e repetimos mais uma vez esse processo, até que tenhamos esgotado todos os algarismos do dividendo e tenhamos encontrado um resto menor que o divisor (no nosso exemplo, o resto é 4).

Porque o processo descrito no exemplo anterior funciona? Veja que $779 = 700 + 70 + 9$. Ao dividir o algarismo 7 por 5, na verdade estamos dividindo 7 centenas (que é o que o primeiro algarismo 7 representa em 779) por 5, obtendo: $7 = 5 \cdot 1 + 2$ centenas. De forma equivalente, temos $700 = 5 \cdot 100 + 200$. Isso determina que o quociente será composto de 1 centena. Para continuar, escrevemos:

$$779 = 700 + 79 = 5 \cdot 100 + 200 + 79 = 5 \cdot 100 + 279. \quad (1)$$

Para continuar a divisão, agora é preciso dividir 279 por 5. Veja que o primeiro passo desta divisão é justamente dividir as 27 dezenas (pois $279 = 27 \cdot 10 + 9$) por 5, o que é exatamente o que fizemos no dispositivo prático. Como $27 = 5 \cdot 5 + 2$ dezenas, temos que $270 = 5 \cdot 50 + 20$ e, portanto,

$$279 = 270 + 9 = 5 \cdot 50 + 20 + 9 = 5 \cdot 50 + 29.$$

Substituindo isso na equação (1), ficamos com:

$$\begin{aligned} 779 &= 5 \cdot 100 + 5 \cdot 50 + 29 \\ &= 5 \cdot (100 + 50) + 29 \\ &= 5 \cdot 150 + 29. \end{aligned}$$

Por fim, dividimos 29 por 5, obtendo $29 = 5 \cdot 5 + 4$. Daí,

$$\begin{aligned} 779 &= 5 \cdot 150 + 29 = 5 \cdot 150 + 5 \cdot 5 + 4 \\ &= 5 \cdot (150 + 5) + 4 \\ &= 5 \cdot 155 + 4. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o quociente é 155 e o resto é 4.

Agora, seguiremos passos essencialmente idênticos aos acima para executar uma divisão entre polinômios. A diferença é que o papel dos algarismos das centenas, dezenas,

unidades é realizado pelos coeficientes dos monômios. Assim, começamos dividindo o monômio de maior grau do dividendo pelo monômio de maior grau do divisor. Vejamos como proceder examinando em detalhe o seguinte

Exemplo 4. Calcule o quociente e o resto da divisão de

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x - 3 \quad \text{por} \quad d(x) = x^2 - 2.$$

Solução. Neste exemplo, temos o dividendo $x^3 - 4x^2 + x - 3$ e o divisor $x^2 - 2$, e montamos o dispositivo prático abaixo. O passo a passo abaixo, também pode ser visto na videoaula deste material.

$$x^3 - 4x^2 + x - 3 \quad \Big| \quad x^2 - 2$$

Como explicado antes do exemplo, começamos dividindo x^3 por x^2 . O resultado é x , que é escrito abaixo do divisor:

$$x^3 - 4x^2 + x - 3 \quad \Big| \quad x^2 - 2$$

$$x$$

Em seguida, multiplicamos x pelo divisor, obtendo $x(x^2 - 2) = x^3 - 2x$. Queremos subtrair esse valor do dividendo, logo, invertemos o sinal de cada monômio e somamos o resultado ao dividendo. Tomamos o cuidado de escrever cada monômio abaixo do monômio de mesmo grau para realizar a soma:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + x - 3 & x^2 - 2 \\ -x^3 & + 2x \\ \hline & -4x^2 + 3x - 3 \end{array}$$

Agora, temos um resto parcial, $-4x^2 + 3x - 3$, e continuamos seguindo o mesmo método para dividir este resto pelo divisor original ($x^2 - 2$).

Dividindo $-4x^2$ por x^2 obtemos -4 . Escrevemos o -4 abaixo do divisor, multiplicamos ele pelo divisor, invertemos o sinal e somamos ao resto parcial atual para obter um novo

resto.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + x - 3 & x^2 - 2 \\ -x^3 & + 2x \\ \hline -4x^2 + 3x - 3 & \\ 4x^2 & - 8 \\ \hline & 3x - 11 \end{array}$$

Nesse estágio, temos um resto que tem grau menor que o divisor. Portanto, este é nosso resto final.

Dessa forma, concluímos que o quociente da divisão é $x - 4$ e o resto $3x - 11$. Veja ainda que vale:

$$\underbrace{x^3 - 4x^2 + x - 3}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2 - 2)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(x - 4)}_{\text{quociente}} + \underbrace{(3x - 11)}_{\text{resto}}.$$

□

Exemplo 5. Efetue a divisão de $f(x) = 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$ por $g(x) = 2x^2 + x - 3$.

Solução. Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, começamos dividindo o monômio $6x^4$ por $2x^2$, de onde obtemos $3x^2$. Multiplicando isso pelo divisor, invertendo o sinal e somando ao dividendo, obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & 2x^2 + x - 3 \\ -6x^4 - 3x^3 + 9x^2 & \\ \hline -4x^3 + 12x^2 - x & \end{array}$$

Note que na terceira linha acima, baixamos apenas o “ $-x$ ” e não o “ $+1$ ”. Isso é opcional, porque sabemos que vamos precisar usar apenas 3 monômios no passo seguinte. A intenção é apenas deixar o dispositivo mais “limpo”. Contudo, caso você baixe o “1” não há qualquer problema e processo continua da mesma forma. Como ainda não baixamos o $+1$ precisaremos lembrar de fazer isso mais à frente. Observe que isso é o análogo do que fizemos com o algarismo “9” no Exemplo 3 (na divisão 779 por 5).

Prosseguindo, dividimos $-4x^3$ por $2x^2$, obtemos $-2x$ e acrescentamos as próximas linhas ao dispositivo:

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & 2x^2 + x - 3 \\
 -6x^4 - 3x^3 + 9x^2 & 3x^2 - 2x \\
 \hline
 -4x^3 + 12x^2 - x & \\
 4x^3 + 2x^2 - 6x & \\
 \hline
 14x^2 - 7x + 1 &
 \end{array}$$

Veja que, nesse passo, precisamos baixar o $+1$ para dar continuidade.

Por fim, dividindo $14x^2$ por $2x^2$ obtemos 7 e terminamos a divisão como segue:

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & 2x^2 + x - 3 \\
 -6x^4 - 3x^3 + 9x^2 & 3x^2 - 2x + 7 \\
 \hline
 -4x^3 + 12x^2 - x & \\
 4x^3 + 2x^2 - 6x & \\
 \hline
 14x^2 - 7x + 1 & \\
 -14x^2 - 7x + 21 & \\
 \hline
 -14x + 22 &
 \end{array}$$

Assim, temos o quociente $3x^2 - 2x + 7$ e o resto $-14x + 22$. Veja também que:

$$\begin{array}{c}
 \text{divisor} \quad \quad \quad \text{resto} \\
 \nearrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 f(x) = g(x) \cdot (3x^2 - 2x + 7) + (-14x + 22). \\
 \nwarrow \quad \quad \quad \nwarrow \\
 \text{dividendo} \quad \quad \quad \text{quociente}
 \end{array}$$

□

Um ponto importante é que os coeficientes envolvidos nas divisões acima não necessitam ser inteiros. De fato, eles não precisam nem ser números reais (uma vez que permitimos polinômios com coeficientes complexos).

Exemplo 6. Neste exemplo, realizamos a divisão de

$$5x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 \text{ por } 3x^2 - 3.$$

Veja como fica o dispositivo.

$$\begin{array}{r|l} 5x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & 3x^2 - 3 \\ -5x^4 & + 5x^2 \\ \hline & -x^3 + 8x^2 - x \\ & x^3 & -x \\ \hline & 8x^2 - 2x + 1 \\ & -8x^2 & + 8 \\ \hline & -2x + 9 \end{array}$$

(Tente decifrar o passo a passo que foi executado para obtê-lo.)

Assim, o quociente e o resto são, respectivamente,

$$q(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \quad e \quad r(x) = -2x + 9.$$

No exemplo a seguir, tratamos de casos onde o dividendo possui algum de seus coeficientes igual a zero.

Exemplo 7. Calcule o quociente, $q(x)$, e o resto, $r(x)$, da divisão de $p(x)$ por $d(x)$ em cada caso abaixo:

(a) $p(x) = x^4 - 1$ e $q(x) = x^2 + 2x + 1$.

(b) $p(x) = -x^3 - 4x^2 + 3$ e $q(x) = x^2 - 2x$

Solução.

(a) Ao montar o dispositivo da divisão, vamos completar $p(x)$ de forma que apareçam todos os monômios com expoentes menores ou iguais ao grau de $p(x)$. Os monômios que não apareciam originalmente em $p(x)$ são incluídos com coeficiente igual a zero (o que não altera o valor de $p(x)$). Isso ajuda com que o dispositivo tenha o tamanho adequado para realizar o restante da divisão e organiza suas “colunas”. Assim, fazemos

$$p(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$$

e obtemos

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 2x + 1 \\ -x^4 - 2x^3 - x^2 & \hline -2x^3 - x^2 + 0x & \\ 2x^3 + 4x^2 + 2x & \hline 3x^2 + 2x - 1 & \\ -3x^2 - 6x - 3 & \hline -4x - 4 & \end{array}$$

Veja que o quociente é $q(x) = x^2 - 2x + 3$ e o resto é $r(x) = -4x - 4$.

(b) Executando a divisão, obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 - 4x^2 + 0x + 3 & x^2 - 2x \\ x^3 - 2x^2 & \hline -6x^2 + 0x & \\ 6x^2 - 12x & \hline -12x + 3 & \end{array}$$

Logo, temos o quociente $q(x) = -x - 6$ e o resto $-12x + 3$. \square

É possível demonstrar que, para quaisquer polinômios $p(x)$ e $d(x)$ (com coeficientes complexos), o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $r(x)$ são unicamente determinados. É importante lembrar que a definição de quociente e resto requer que, além de serem funções polinomiais que satisfazem $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$, o polinômio $r(x)$ seja constante e igual a zero ou tenha grau (estritamente) menor que o grau de $d(x)$.

Se ignorarmos a condição sobre os graus, existem vários outros polinômios $q'(x)$ e $r'(x)$ que satisfazem a igualdade $p(x) = d(x) \cdot q'(x) + r'(x)$.

No caso em que o resto, $r(x)$ é a função constante igual zero, temos que $p(x) = d(x) \cdot q(x)$. Em uma tal situação, dizemos que $p(x)$ é **divisível** por $d(x)$, ou que $d(x)$ é um **fator** de $p(x)$.

Dicas para o Professor

Sugerimos que conteúdo deste material seja coberto em dois encontros de 50 minutos. A demonstração de que o quociente e o resto de uma divisão são unicamente determinados é relativamente curta, mas exige um pouco mais de maturidade e foge do escopo dessa aula. Recomendamos que os interessados nela vejam a referência [1] abaixo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.
2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios, Equações*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.