

Material Teórico - Módulo de PROBLEMAS DOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS - CAPÍTULOS 2 E 3

Problemas dos Capítulos 2 e 3 - Parte I

Problemas Resolvidos

Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha

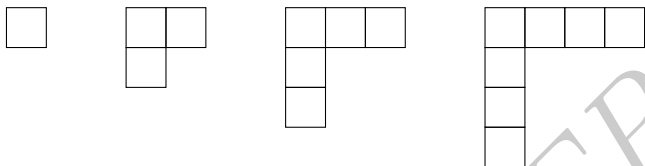
4 de Agosto de 2021



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Problemas do Capítulo 2

Exercício 1. Na sequência de figuras dada, quantos quadrados há na centésima figura? Quantos quadrados há, ao todo, nas cem primeiras figuras?



Solução. Observe que há um quadrado na primeira figura e, em cada uma das seguintes, dois a mais do que na anterior. Dessa forma, os números de quadrados nas figuras podem ser representados como uma sequência de números ímpares: $1, 3, 5, \dots$. Para chegar à centésima figura, é necessário somar dois quadrados à primeira figura 99 vezes. Portanto, a centésima figura consistirá de $1 + 2 \times 99 = 199$ quadrados.

Para responder à segunda pergunta, note que, juntando o quadrado da primeira figura à segunda figura, obtemos um quadrado de lado 2. Em seguida, juntando esse quadrado de lado 2 à terceira figura, obtemos um quadrado de lado 3. Prosseguindo dessa forma, as 100 primeiras figuras juntas formam um quadrado 100×100 , que contém $100 \times 100 = 10000$ quadrados de lado 1. $\square$

Observação 2. Generalizando a ideia que utilizamos na solução da segunda parte do problema anterior, concluímos que a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2 .

Exercício 3. Um gafanhoto pula ao longo de uma reta, podendo pular 6 ou 8 centímetros em qualquer sentido.

- (a) Ele pode alcançar um ponto que está a 1,5 centímetro de sua posição original?
- (b) Ele pode alcançar um ponto que está a 7 centímetros de sua posição original?

(c) *Ele pode alcançar um ponto que está a 4 centímetros de sua posição original?*

Justifique suas respostas.

Solução.

(a) É claro que não, pois o gafanhoto só consegue pular números inteiros de centímetros.

(b) Não. Para ver porque, note que, uma vez que 6 e 8 são números pares, o gafanhoto só consegue se deslocar, após um número qualquer de pulos, de um número par de centímetros em relação à sua posição original. Assim, após um número qualquer de pulos, sua distância da posição original será sempre um número par de centímetros.

(c) Sim. Por exemplo, ele pode pular 6 centímetros duas vezes em um mesmo sentido e, depois, pular 8 centímetros no sentido contrário. Como $6 + 6 - 8 = 4$, ele terminará em um ponto situado a 4 centímetros de sua posição original. $\square$

Exercício 4. *Dez duendes estão jogando damas. Cada um joga uma partida com cada um dos outros. Ao final, quantas partidas cada duende jogou? Quantas partidas foram jogadas ao todo?*

Solução. Evidentemente, cada duende jogou 9 partidas.

Para responder a segunda pergunta, observe que o primeiro duende jogou 9 partidas; o segundo, mais 8, pois sua partida com o primeiro já foi contada; o terceiro jogou mais 7, pois suas partidas com os dois primeiros já foram contadas; e assim por diante. Logo o número total de partidas é igual a

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0.$$

Resta calcular a soma acima. Para tanto, a ideia a seguir fornece um “atalho”: escreva a soma duas vezes, uma na ordem crescente e outra na ordem decrescente:

$$S = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0;$$

$$S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

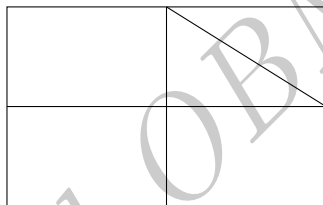
Somando membro a membro as duas igualdades e notando que $9 + 0 = 8 + 1 = 7 + 2 = \dots = 1 + 8 = 0 + 9 = 9$, obtemos

$$2S = 10 \times 2,$$

logo, $S = 45$. □

Exercício 5. Um retângulo de papelão com área 1 é cortado em dois pedaços ao longo do segmento de reta que liga os pontos médios de dois lados adjacentes. Calcule as áreas dos dois pedaços.

Solução. Marque os pontos médios de cada lado do retângulo e ligue os pontos médios dos dois pares de lados opostos, conforme mostrado na figura a seguir:



O retângulo fica dividido em quatro retângulos menores idênticos, cada um com área $\frac{1}{4}$. Ao ligarmos os pontos médios de dois lados adjacentes, dividimos um desses retângulos em duas partes iguais, cada uma das quais de área

$$\frac{1/4}{2} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, a área do pedaço menor mede $\frac{1}{8}$, enquanto a área do pedaço maior mede

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

□

2 Problemas do Capítulo 3

Exercício 6. *Há 10 cestas arrumadas em círculo. É possível arrumar laranjas nas cestas de modo que as diferenças entre os números de laranjas em duas cestas adjacentes quaisquer seja igual a 1? E se forem 9 cestas?*

Solução. Para a primeira pergunta a resposta é *sim*. Basta colocar 2 ou 3 laranjas em cada cesta, de forma alternada.

Para a segunda pergunta, a resposta é *não*. Para entender porque, note que, se a situação descrita no enunciado fosse possível, então duas cestas vizinhas quaisquer deveriam ter quantidades de laranjas com paridades opostas. Isso significa que do lado direito de uma cesta com um número par de laranjas deve haver uma cesta com um número ímpar de frutas; de modo análogo, do lado esquerdo de uma cesta com um número ímpar de laranjas deve haver uma cesta com um número par de frutas. Assim, a quantidade de cestas com um número par de laranjas deveria ser igual à quantidade de cestas com um número ímpar de laranjas. Portanto, o número total de cestas seria par, o que não é o caso, uma vez que 9 é ímpar. $\square$

Exercício 7. *O que é maior: a soma de todos os números pares de 0 a 100 ou a soma de todos os números ímpares de 1 a 99? Por quanto?*

Solução. Para resolver este problema, não é necessário calcular a soma de todos os números pares até 100, calcular a soma de todos os números ímpares até 100 e depois comparar os dois resultados.

Uma estratégia mais simples é começar dividindo os números de 1 a 100 em pares: 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6, ..., 99 e 100. Temos 50 pares e cada par tem um número ímpar e um par, com o ímpar sendo igual ao par menos um.

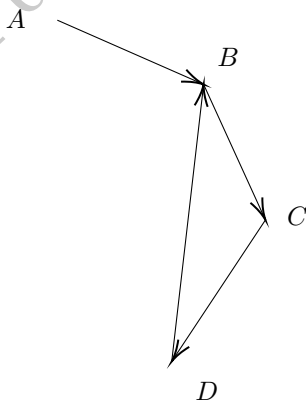
Logo a soma dos números ímpares de 0 a 100 é menor do que a soma dos números pares de 0 a 100 e a diferença entre essas duas somas é igual a $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{50 \text{ vezes}} = 50$. $\square$

Exercício 8. O diretor de um serviço secreto preparou uma escala de vigilância mútua para seus 7 agentes. O agente 001 vigia o agente que vigia o agente 002, o agente 002 vigia o agente que vigia o agente 003 e, assim por diante, com o agente 007 vigiando o agente que vigia o agente 001. Entretanto, não é permitido que: (i) um agente vigie dois ou mais agentes; (ii) um agente seja vigiado por dois ou mais agentes. Quem vigia quem?

Solução. Escreva pontos A, B, C, D, E, F, G ao redor de um círculo, conforme mostrado parcialmente na figura a seguir; tais pontos representam os agentes, mas, por enquanto, a correspondência entre agentes e pontos é desconhecida.

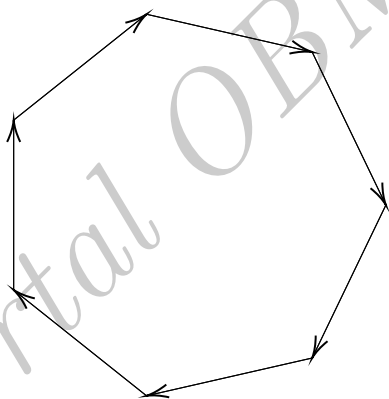
Se um agente estiver vigiando outro, desenharemos uma seta que parte do agente que vigia e vai até o agente vigiado (seu *alvo*). Começamos sem setas e sabemos, pelo enunciado do problema, que cada agente vigia exatamente um outro e é vigiado por exatamente um outro.

Começemos associando o ponto A ao agente 001. O agente vigiado por 001 pode ser representado pelo próximo ponto no círculo, denotado por B. Uma vez feita essa associação, desenhamos uma seta de A para B. O agente representado por B vigia um agente (que sabemos ser 002) que não é ele mesmo nem o 001, então, associamos o alvo de B ao próximo ponto no círculo, C, e desenhamos uma seta de B para C.



Agora, observe que há duas possibilidades para a seta que sai de C: ou ela volta para A, formando um ciclo com três setas, ou ela vai para um ponto novo, que podemos escolher como sendo o próximo ponto no círculo, D. Analogamente, a seta saindo de D vai para A ou para um ponto novo; no entanto, não podemos ter a situação mostrada na figura acima, pois isso significaria que um agente está sendo vigiado por dois outros. Logo, em cada passo, avançamos um ponto no círculo, ou voltamos para A. Em qualquer caso, obtemos um ciclo de agentes, cada um vigiando o próximo.

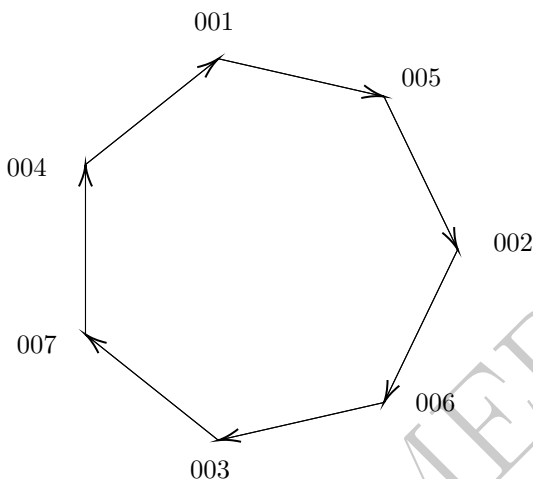
Então, veja que esse ciclo tem que incluir todos os agentes, já que, pelo enunciado do problema, 002 está no mesmo ciclo que 001; 003 está no mesmo ciclo que 002; e assim por diante até o 007. Assim, a situação é como ilustrado na próxima figura:



Por fim, resta numerar um ponto sim e outro não, ao longo do ciclo, com os números dos agentes em ordem crescente: A é o 001 e B é o agente vigiado por A, logo, C é o 002; D é o agente vigiado por 002, logo, E é o 003; e assim por diante. Continuando dessa forma, a situação de quem vigia quem é ilustrada a seguir:

□

Exercício 9. *Dentre 9 moedas aparentemente idênticas, uma*



é mais leve que as outras. Como descobrir a mais leve usando apenas duas pesagens em uma balança de pratos? Qual o menor número de pesagens, se forem 27 moedas?

Solução. Resolvamos primeiro um problema mais simples, quando há apenas 3 moedas. Como podemos encontrar a moeda falsa com apenas uma pesagem? Pesamos duas moedas, colocando uma em cada prato. Se elas tiverem o mesmo peso, a moeda que não foi pesada é a falsa. Se uma for mais pesada do que outra, a moeda mais leve é a falsa.

Agora, voltemos ao problema com as 9 moedas. Divida-as em três pilhas de 3 moedas cada e, em seguida, compare os pesos das duas primeiras pilhas. Se a balança ficar equilibrada, a moeda falsa estará na terceira pilha. Se uma pilha for mais pesada do que a outra, a moeda falsa está na pilha mais leve. Assim, com uma pesagem encontramos a pilha de 3 moedas que contém a moeda falsa. A partir daí, recaímos no problema anterior (com 3 moedas). Para resolvê-lo, já vimos que basta e uma pesagem adicional.

Por fim, se tivermos 27 moedas, começamos dividindo-as em três pilhas de 9 moedas cada e utilizando uma pesagem para descobrir qual pilha contém a moeda mais leve. Em

seguida, partindo da pilha de 9 moedas e que contém a moeda falsa, já vimos que são necessárias mais duas pesagens pra descobrir qual é a moeda falsa. Portanto, com 27 moedas precisamos de três pesagens. $\square$

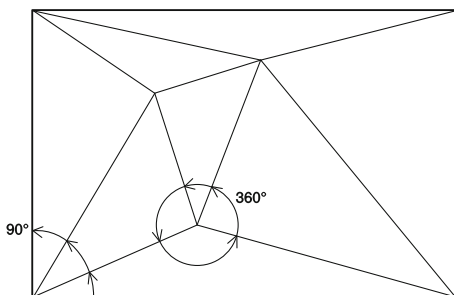
3 Problemas extras

Exercício 10. *Para sua festa de 100 anos, George convidou 202 amigos. Eles o presentearam com um bolo de aniversário retangular, com 100 velas de aniversário. As velas foram posicionadas sobre o bolo de forma que não havia três velas colineares, ou duas velas e um canto do bolo colineares, ou uma vela e dois cantos do bolo colineares. George cortou o bolo em pedaços triangulares, utilizando cortes retos que conectavam velas entre si e/ou com cantos do bolo, de tal forma que nenhum corte cruzava cortes anteriores. Prove que há pedaços suficientes para servir um pedaço de bolo a cada convidado, mas nenhum pedaço sobrar para George.*

Solução. Suponha que a divisão mencionada dividiu a parte de cima do bolo em n triângulos.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° , a soma dos ângulos internos desses n triângulos vale $n \times 180^\circ$.

Por outro lado, em cada vela, a soma dos ângulos dos triângulos que nela chegam vale 360° , ao passo que, em cada canto do bolo, essa soma vale 90° (a figura a seguir ilustra tais situações).



Uma vez que o bolo tem 4 cantos e 100 velas, a soma de todos os ângulos internos de todos os pedaços triangulares também pode ser calculada como segue:

$$100 \times 360^\circ + 4 \times 90^\circ = 101 \times 360^\circ.$$

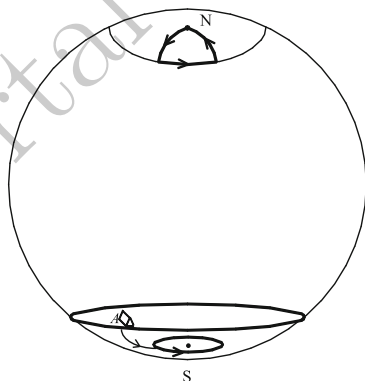
Assim, devemos ter

$$n \times 180^\circ = 101 \times 360^\circ,$$

de sorte que $n = 202$. □

Exercício 11. *Um aventureiro saiu de seu acampamento, andou 10km para o Sul, depois 10km para o Leste e, por fim, 10km para o Norte, voltando ao ponto de partida. De onde ele partiu? Descreva todas as possibilidades.*

Solução. Uma possibilidade é o acampamento estar no Polo Norte. Nesse caso, o aventureiro foi 10km para Sul (ao longo de um meridiano), então 10km para Leste (ao longo de um paralelo) e 10km para o Norte (ao longo de outro meridiano), voltando ao Polo Norte (veja a parte de cima da figura a seguir).



No entanto, há outras soluções! O movimento do aventureiro também é possível caso seu acampamento esteja situado 10km acima do paralelo situado próximo ao Polo Sul e tendo

10 quilômetros de circunferência (veja a parte de baixo da figura acima). Nesse caso, ao se deslocar 10km para o Sul, ele chega a um ponto desse paralelo. Então, ao se deslocar 10km para o Leste, ele percorre todo esse paralelo, terminando no ponto do qual partiu. Por fim, ao se deslocar 10km para o Norte, ele voltará ao acampamento! $\square$

Exercício 12. *A senha eletrônica de uma porta é formada por um número de três algarismos, composto apenas pelos algarismos 1, 2 e 3. A porta abre somente se os três algarismos da senha forem apertados em sequência. Por exemplo, se a senha for 223 e uma pessoa digitar a sequência de oito algarismos*

1,2,2,1,3,2,2,3,

a porta será aberta somente após o oitavo número. Calcule o número mínimo de algarismos que devem ser digitados em sequência para que a porta seja aberta, independentemente de qual seja a senha.

Solução. Existem $3^3 = 27$ senhas diferentes. A sequência procurada deve apresentar todas essas 27 combinações entre 3 de seus elementos consecutivos. Em uma sequência com n algarismos consecutivos, excetuando-se os dois primeiros, todos os demais são o termo final de uma sequência de três números consecutivos. Portanto, $n - 2$ deve ser pelo menos 27 e, daí, n é pelo menos 29.

Resta listar uma sequência de 29 algarismos que contemple todas as 27 senhas possíveis. Uma possibilidade é (verifique!)

11123222133313121223113233211.

$\square$

4 Sugestões aos professores

Ao professor que deseja criar um círculo matemático em sua escola, recomendamos, além do livro [1], os livros [2] e [3]. Em tais referências, o professor encontrará problemas separados em conjuntos que tratam sobre um mesmo tema.

É importante que o professor entenda que a dinâmica de um encontro em um círculo matemático é diferente daquela que comumente encontra-se nas aulas ordinárias da escola. Em primeiro lugar, deve-se dar um tempo maior para que os alunos pensem em suas próprias soluções para os exercícios. Além disso, os alunos devem ser convidados a exporem suas ideias (mesmo que parcialmente incompletas ou inconsistentes) aos colegas. A ideia é transformar a solução de um problema em um debate construtivo em que mais de uma pessoa possa colaborar para que a turma encontre uma solução adequada.

Observe que muitas das situações apresentadas nessa lista possuem diversas soluções ou podem ser modificados para gerar novas formas de exploração das ideias utilizadas na solução. Recomendamos que os professores utilizem essa estratégia para manter a turma motivada ao longo da aula.

Sugestões de Leitura Complementar

1. S. Dorichenko. *Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana*. IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
2. D. Fomin, I. Itenberg e S. Genkin. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
3. B. Holanda e E. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Álgebra, Aritmética e Combinatória* IMPA, Rio de Janeiro, 2018.