Material Teórico - Módulo Cardinalidade de Conjuntos

Conjuntos Não Enumeráveis - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Antonio Caminha M. Neto

10 de Setembro de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Na aula anterior, estudamos em detalhe várias operações que preservam enumerabilidade, bem como demonstramos que vários conjuntos infinitos são enumeráveis. Dentre esses, destacamos o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Neste último material do módulo, veremos exemplos de conjuntos *não-enumeráveis*, isto é, tais que *não existe* nenhuma maneira de enumerar seus elementos. Em particular, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pertencerá a essa categoria.

Definição 1. *Um conjunto infinito A é* ***não enumerável*** *se A não for enumerável, isto é, se não existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.*

Bem entendido, se um conjunto infinito A for não enumerável, a impossibilidade de gerar uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ não é uma deficiência daquele que tenta gerá-la; essa impossibilidade significa que uma tal bijeção não existe, independentemente da maneira pela qual tentemos construí-la.

A seguir, apresentamos um primeiro exemplo de conjunto não enumerável. Para essa discussão, é conveniente denominar um conjunto de **família** se seus elementos forem outros conjuntos. Assim,

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

é uma família, mas

$$\{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad \{\{1\}, \{2\}, 3\}$$

não o são.

Exemplo 2. *Seja $\mathcal{F}$ a família dos subconjuntos infinitos A de $\mathbb{N}$ tais que $\mathbb{N} \setminus A$ também é infinito, isto é,*

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N};\ A \text{ e } \mathbb{N} \setminus A \text{ são infinitos.}\}.$$

Mostre que $\mathcal{F}$ é um conjunto não enumerável.

Antes de passarmos à demonstração, é interessante parar por um momento e pensar em alguns exemplos de conjuntos $A \subset \mathbb{N}$ tais que A e $\mathbb{N} \setminus A$ sejam infinitos. Um deles é o conjunto dos naturais pares, $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ e outro o dos naturais ímpares, $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$. Contudo, o conjunto A dos naturais maiores ou iguais a 1000, isto é, o conjunto $A = \{1000, 1001, 1002, 1003, \ldots\}$, não pertence à família $\mathcal{F}$; isso porque, apesar de A ser infinito, o $\mathbb{N} \setminus A$ é o conjunto finito $\{1, 2, 3, \ldots, 999\}$.

Prova do exemplo. Inicialmente, note que $\mathcal{F}$ é uma família *infinita*. Realmente, sendo $a, r \in \mathbb{N}$, com $r > 1$, temos que o conjunto

$$A = \{a, a + r, a + 2r, a + 3r, \ldots\},$$

dos naturais que são termos da progressão aritmética de termo inicial a e razão r, pertence à família $\mathcal{F}$; isso porque, como $r > 1$, temos

$$\mathbb{N} \setminus A \supset \{a + 1, a + r + 1, a + 2r + 1, a + 3r + 1, \ldots\},$$

logo, $\mathbb{N} \setminus A$ também é infinito.

Agora, suponha, por contradição, que $\mathcal{F}$ fosse enumerável. Então, teríamos

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\},$$

para certos conjuntos infinitos $A_1, A_2, A_3, \ldots \subset \mathbb{N}$ tais que $\mathbb{N} \setminus A_1$, $\mathbb{N} \setminus A_2$, $\mathbb{N} \setminus A_3$, ... também são infinitos.

Defina $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ escolhendo $x_1 \in \mathbb{N} \setminus A_1$, então $x_2 \in \mathbb{N} \setminus A_2$ tal que $x_2 > x_1 + 1$, então $x_3 \in \mathbb{N} \setminus A_3$ tal que $x_3 > x_2 + 1$ etc.

Como $x_k \notin A_k$, temos $A \neq A_k$. Por outro lado, como $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, concluímos que A é infinito. Além disso, como $x_{k+1} > x_k + 1$ para todo $k \geq 1$, concluímos que $x_k + 1 \in \mathbb{N} \setminus A$ para todo $k \geq 1$; então, $\mathbb{N} \setminus A$ contém o conjunto infinito $\{x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1, \ldots\}$, logo, $\mathbb{N} \setminus A$ é, ele mesmo, um conjunto infinito.

Dessa forma, fomos capazes de construir um conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \neq A_1, A_2, A_3, \ldots$, o que é uma contradição. Como tal contradição adveio da suposição de que $\mathcal{F}$ fosse enumerável, a única conclusão possível é que $\mathcal{F}$ seja não enumerável. $\square$

O Corolário 2 do material anterior estabeleceu que se $f : A \to B$ for uma função injetiva e B for um conjunto enumerável, então A também é um conjunto enumerável.

Agora que sabemos que conjuntos não enumeráveis existem, é interessante enunciarmos a contraposição dessa afirmação, uma vez que ela possibilitará gerar outros exemplos naturais de conjuntos não enumeráveis.

Proposição 3. *Se $f : A \to B$ for injetiva e A for não enumerável, então B também é não enumerável. Em particular, se $A \subset B$ e A for não enumerável, então B também é não enumerável.*

Prova. Para a primeira parte, note que essa afirmação, sendo a contraposição do Corolário 2 do material anterior, é logicamente equivalente a ele. Para a segunda parte, basta aplicar a primeira observando que, se $A \subset B$, então a *inclusão* $\iota : A \to B$ (isto é, a função dada por $\iota(x) = x$, para todo $x \in A$) é injetiva. $\square$

Todo conjunto tem, associado a si de forma natural, a *família* ou *conjunto* de suas partes. Mais precisamente, dado um conjunto X, definimos a **família das partes de $\boldsymbol{X}$**, denotada $\mathcal{P}(X)$, por

$$\mathcal{P}(X) = \{A;\, A \subset X\}.$$

A Combinatória elementar ensina que, se X for finito com $|X| = n$, então $\mathcal{P}(X)$ também é finito, com $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$. Por exemplo, se $X = \emptyset$ (finito com 0 elementos), então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ (finito, com $2^0 = 1$ elemento); se $X = \{a\}$ (finito com 1 elemento), então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, a\}$ (finito com $2^1 = 2$ elementos). Mais geralmente, se $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (finito com n elemento), então $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$, uma vez que escolher um subconjunto A de X equivale a decidir, para cada inteiro $1 \le k \le n$, se $a_k \in A$ ou $a_k \notin A$; portanto, o Princípio Fundamental da Contagem assegura que há exatamente

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n$$

maneiras de formar A.

O próximo exemplo utiliza a Proposição 3 para explicar o que ocorre quando X for infinito.

Exemplo 4. *Se X for um conjunto infinito, então $\mathcal{P}(X)$ é não enumerável.*

Prova. Note primeiramente que, graças ao Exemplo 2 e à Proposição 3, a família das partes de $\mathbb{N}$ é não enumerável.

De fato, $\mathcal{P}(N)$ contém a família $\mathcal{F}$ do Exemplo 2; como $\mathcal{F}$ é não enumerável, a segunda parte da Proposição 3 garante que $\mathcal{P}(N)$ também é não enumerável.

Agora, sendo X um conjunto infinito, sabemos que X contém um subconjunto infinito e enumerável $Y = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$; por sua vez, isso dá origem a uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$, dada por $f(n) = x_n$, para todo $n \geq 1$. A partir de f, definamos a função $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(X)$ pondo, para $A \subset \mathbb{N}$,

$$F(A) = \{f(a);\, a \in A\}.$$

(Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$, então $F(A) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{x_1, x_2, x_3\}$; se $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, então $F(A) = \{f(2), f(4), f(6), f(8), \ldots\} = \{x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots\}$, e assim por diante.)

Se mostrarmos que F continua injetiva, a primeira parte da Proposição 3 (aplicada a F), juntamente com o fato de que $\mathcal{P}(N)$ é não enumerável, garantirá que $\mathcal{P}(X)$ também é não enumerável. Deixamos este último passo como exercício para você. $\square$

O próximo resultado usa a teoria de convergência de séries, juntamente com a segunda parte da Proposição 3, para dar uma demonstração de que o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais é não enumerável.

Essa demonstração resultará ligeiramente diferente daquela apresentadas nas vídeo-aulas, pelo quê sugerimos a você que primeiro assista aquela para, em seguida, debruçar-se sobre esta.

Para o que segue, se $\mathcal{F}'$ for a família dos subconjuntos infinitos de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{F}$ for a família do Exemplo 2, é claro que

$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}$ é não enumerável, a segunda parte da Proposição 3 garante que $\mathcal{F}'$ também é não enumerável.

Teorema 5. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.*

Prova. Se $A = \{m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\}$ for um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ (isto é, um elemento de $\mathcal{F}'$), é possível mostrar (e é aí que entra a teoria de convergência de séries — veja o capítulo 5 da referência [1]) que a soma infinita

$$\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \frac{1}{2^{m_3}} + \ldots,$$

que abreviaremos pela *série*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{m_k}},$$

define um número real positivo. Ademais, tal número real vale no máximo 1, uma vez que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{m_k}} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

Seja $B = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ outro subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Se mostrarmos que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{m_k}} \neq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{n_k}},$$

então a correspondência

$$A \mapsto \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{m_k}} \tag{1}$$

definirá uma função injetiva de $\mathcal{F}'$ em $\mathbb{R}$, o que, como vimos, será suficiente para garantir que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

O que falta fazer é bastante similar à demonstração da unicidade da representação binária dos naturais. De fato, suponha que tenhamos

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{m_k}} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{n_k}}. \tag{2}$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{m_1}} &< \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{m_k}} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{n_k}}\\ &\leq \sum_{j\geq n_1}\frac{1}{2^j} = \frac{1/2^{n_1}}{1-1/2}\\ &= \frac{1}{2^{n_1-1}},\end{aligned}$$

de modo que $m_1 \geq n_1$.

Trocando os papeis das duas séries nas estimativas acima, concluímos analogamente que $m_1 \leq n_1$, logo, $m_1 = n_1$. Assim, segue de (2) que

$$\sum_{k\geq 2}\frac{1}{2^{m_k}} = \sum_{k\geq 2}\frac{1}{2^{n_k}}. \tag{3}$$

A partir dessa última igualdade concluímos, por meio de estimativas similares às feitas acima, que $m_2 = n_2$. Então, (3) garante que

$$\sum_{k\geq 3}\frac{1}{2^{m_k}} = \sum_{k\geq 3}\frac{1}{2^{n_k}}.$$

Finalmente, prosseguinde dessa forma, obtemos por indução que $m_k = n_k$ para todo $k \geq 1$. Mas isso é o mesmo que $A = B$, o que é uma contradição (lembre-se de que tomamos $B \neq A$). Então,

$$A \neq B \Rightarrow \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{m_k}} \neq \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{n_k}},$$

o que é o mesmo que dizer que (1) é injetiva. □

Uma consequência importante do teorema anterior é o corolário a seguir.

Corolário 6. *O conjunto dos números irracionais é não enumerável.*

Prova. O Teorema 3 do material anterior (Conjuntos Enumeáveis - Parte II) mostrou que se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ também é enumerável. Já o Teorema 11 desse mesmo material anterior mostrou que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Seja $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais. Se $\mathbb{I}$ fosse enumerável, as observações do parágrafo anterior garantiriam que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ seria enumerável. Mas, pelo teorema anterior, isso é impossível, uma vez que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Portanto, $\mathbb{I}$ é não enumerável. $\square$

Observação 7. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, há duas possibilidades mutuamente excludentes:*

- *α é raiz de algum polinômio não nulo de coeficientes racionais.*
- *α não é raiz de nenhum polinômio não nulo de coeficientes racionais.*

No primeiro caso, dizemos que α é um ***número algébrico****; no segundo, que α é um* ***número transcendente****.*

Com um pouco mais de trabalho, pode-se mostrar que o conjunto $\mathbb{A}$ dos números reais algébricos é enumerável. Isso garantirá que o conjunto dos números reais transcendentes é não enumerável (e, em particular, é infinito). Voltaremos a discutir esse ponto no próximo material.

Dicas para o Professor

Este material foi parcialmente extraído da referência [1], a qual remetemos o leitor para mais detalhes e, em particular, para uma discussão autocontida da teoria de convergência de séries.

Para os estudantes que tenham passado pelos materiais anteriores, acreditamos que duas sessões de 50 minutos devam bastar para apresentar o material aqui reunido.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2022.