Material Teórico - Módulo Equações do Segundo Grau

Resultados Básicos - Parte II

Nono Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Agosto de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A fórmula resolvente da equação de segundo grau

Conforme prometido no material anterior, vamos utilizar o mesmo método nele exercitado para resolver a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

onde a, b e c são reais dados, sendo $a \neq 0$. O resultado será uma fórmula geral, que retorna os possíveis valores reais de x em função de a, b e c. Tal fórmula foi desenvolvida por um matemático indu chamado Sridhara, no Século X d.C. Contudo, ela foi publicada apenas no Século XII, por Bhaskara, um matemático também indu. Por isso, ela acabou ficando conhecida popularmente como "fórmula de Bhaskara"[1].

Como $a \neq 0$, podemos começar dividindo ambos os lados de (1) por a. (Isso tornará mais fácil completar quadrados.) Assim fazendo, temos que:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

ou, ainda,

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = -\frac{c}{a}.$$

Para completar o trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo, basta somar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Fazendo isso em ambos os lados (a fim de não alterar a equação), obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
\end{aligned}$$

[1]Há relatos de que, muito antes dessa época, os antigos babilônios já conseguiam resolver certas equações do segundo grau.

Para tornar esta expressão mais curta, é costume denotar o termo $b^2 - 4ac$ pela letra grega maiúscula **delta**, cujo símbolo é Δ. Assim, escrevemos

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{2}$$

Com o auxílio de Δ, a equação reduz-se agora a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3}$$

Como o lado esquerdo da equação (3) é não negativo para todo valor real de x e como $4a^2$ é sempre positivo, se o valor de Δ for negativo, concluímos que nenhum valor real de x satisfará a equação (3). Sendo assim, nesse caso a equação original também não terá qualquer solução real.

Por outro lado, quando $\Delta \geq 0$, podemos reescrever (3) como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2,$$

de sorte que

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

No primeiro caso obtém-se:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ao passo que, no segundo, obtém-se

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Para facilitar a memorização, os dois casos acima são escritos em uma única linha, com o sinal $\pm$. Observe que, quando $\Delta = 0$, esses dois valores coincidem.

Resumimos a discussão acima no quadro a seguir:

Se $\Delta \geq 0$, as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, podem ser obtidas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Observação 1. *Vimos, acima, que a equação* (1) *não possui soluções reais quando o número real* Δ*, dado por* (2)*, for negativo. Também observamos que, quando* $\Delta = 0$*, os dois valores obtidos para* x *serão iguais e a equação possuirá apenas uma solução. Por fim, quando* $\Delta > 0$ *a equação possuirá* (*exatamente*) *duas raízes reais distintas. Por tais razões, o número* Δ *é conhecido como o* ***discriminante***[2] *da equação do segundo grau* (1)*.*

Observação 2. *Ainda no caso em que* $\Delta = 0$*, e por razões que ficarão mais claras quando estudarmos a* forma fatorada *de um trinômio quadrado perfeito*[3]*, diremos por vezes que* (1) *tem* duas raízes iguais *ou, ainda, uma raiz* dupla*.*

Observação 3. *Quando o conjunto dos números reais é ampliado para o conjunto dos* números complexos[4]*, pode-se mostrar que a fórmula para as raízes de uma equação de segundo grau passa a ter sentido mesmo no caso em que* $\Delta < 0$*, dando duas* raízes complexas *para* (1)*.*

2 Aplicando a fórmula de Bhaskara

Nesta seção, resolveremos mais exercícios, agora apenas aplicando diretamente a fórmula de Bhaskara. Esse método pode ser mais rápido do que o de completamento de quadrados, mas requer que tenhamos memorizado a fórmula em questão.

[2]Em Português, *discriminar* é o mesmo que *diferenciar*; não confundir com *descriminar*, que significa retirar a culpa ou criminalidade de alguém.

[3]Veja o material relativo à segunda aula deste módulo.

[4]A esse respeito, veja o módulo *Números Complexos - Forma Algébrica* e módulos subsequentes, do Terceiro Ano do Ensino Médio.

Exemplo 4. *Encontre as raízes de cada uma das equações a seguir:*

(a) $x^2 - 7x + 6 = 0.$

(b) $2x^2 + x = 10.$

(c) $x^2 + 2x + 3 = 0.$

(d) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3}.$

Solução.

(a) Temos que $a = 1$, $b = -7$ e $c = 6$. Assim,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25,$$

de modo que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}.$$

Logo,

$$x = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Em resumo, as raízes da equação são 1 e 6.

(b) Cuidado! Para identificar os valores para a, b e c a serem substituídos na fórmula de Bhaskara, é necessário que um dos lados da equação seja igual a zero. Devemos, então, reescrevê-la como:

$$2x^2 + x - 10 = 0.$$

Daí, $a = 2$, $b = 1$ e $c = -10$ (atente para o fato de que c não é igual a 10, mas sim -10). Sendo assim,

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81,$$

e segue que

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 9}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1+9}{4} = 2 \\ \text{ou} \\ \dfrac{-1-9}{4} = \dfrac{-5}{2} \end{cases}.$$

Logo as raízes são 2 e $-5/2$.

(c) Temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Logo,

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8.$$

Como $\Delta < 0$, podemos concluir diretamente que esta equação não possui raiz real.

(d) Esta equação pode ser reescrita no formato de uma equação do segundo grau, observando-se que:

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 10x \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Em tal equação, temos $a = 3$, $b = -10$ e $c = 3$. Ademais,

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64.$$

Portanto,

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \dfrac{10+8}{6} = 3 \\ \text{ou} \\ \dfrac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$\square$

Exemplo 5. *Um ministro brasileiro organizou uma recepção na qual exatamente metade dos convidados não eram brasileiros, sendo todos eles de países cuja língua oficial não é o Português. Por delicadeza, ao chegar cada convidado disse "bom dia" ao ministro e a cada um dos convidados brasileiros. Sabendo que, ao todo, foram ditos 78 "bons dias", e que o ministro respondeu "bem vindo" a cada um dos convidados, encontre o total de convidados.*

Solução. Sendo x a quantidade de convidados estrangeiros, temos que também havia x convidados brasileiros, além do ministro.

Cada um dos convidados brasileiros disse "bom dia" para o ministro e também para cada um dos demais $x-1$ brasileiros. Sendo assim, o total de "bons dias" dito por brasileiros foi de $x + x(x-1) = x^2$.

Por outro lado, cada estrangeiro disse "bom dia" para o ministro e para cada um dos x brasileiros. Sendo assim, eles fizeram isso exatamente $x + x \cdot x = x(x+1)$ vezes. Por fim, o ministro nunca falou "Bom dia", pois ele sempre respondeu apenas "bem vindo" aos convidados.

Dessa forma, conclui-se que o total de "bom dias" proferidos foi de $x^2 + x(x+1) = 78$. Isso é o mesmo que $x^2 + x^2 + x = 78$ ou, ainda,

$$2x^2 + x - 78 = 0.$$

Para resolver a equação de segundo grau acima, note que

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-78) = 1 + 624 = 625$$

e, com isso,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1+25}{4} = 6 \\ \text{ou} \\ \dfrac{-1-25}{4} = \frac{-26}{4} \end{cases}.$$

Como x é o número de convidados estrangeiros, logo, precisa ser um número natural, a única solução válida é $x = 6$. Por fim, a resposta do problema é que o total de convidados, $2x$, é igual a 12. $\square$

3 Equações biquadradas

Uma equação do tipo

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

em que $a \neq 0$, é chamada de **equação biquadrada**.

Observe que uma equação biquadrada é uma equação polinomial de grau 4. Em geral, equações de grau 4 podem ser bem mais complicadas de resolver. Contudo, no caso de uma equação biquadrada, como todos os expoentes de x são números pares, uma *substituição de variável* a transformará em uma equação de grau 2. Realmente, fazendo $y = x^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 + c = 0 &\implies a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \\ &\implies ay^2 + by + c = 0. \end{aligned}$$

A última equação acima é de segundo grau e, portanto, pode ser resolvida facilmente pela fórmula de Bhaskara. Depois de encontramos os possíveis valores de y, encontramos x fazendo $x = \pm\sqrt{y}$ para cada um dos valores *não negativos* que y possa assumir.

É mais fácil compreender a estratégia delineada acima examinando exemplos

Exemplo 6. *Encontre todas as raízes da equação*

$$-2x^4 + 14x^2 - 24 = 0.$$

Solução. Dividindo ambos os lados da equação por -2, obtemos a equação equivalente mais simples (e também biquadrada)

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$$

Fazendo a substituição $y = x^2$, obtemos:

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Para essa última equação, temos $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$, logo, suas raízes são

$$y_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 3 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 4.$$

Como ambas são positivas, temos quatro possíveis valores reais para x que satisfazem a equação original, a saber:

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -2 \;\text{ e }\; x_4 = 2.$$

$\square$

É claro que, como $y = x^2$, se alguma das raízes da equação $ay^2 + by + c = 0$ for negativa, esta raiz não irá produzir nenhum valor real para x que seja solução da equação biquadrada original. Por outro lado, quando y for zero, a única opção será x igual a zero também.

Exemplo 7. *Encontre todas as raízes da equação*

$$x^4 - 2x^2 - 15 = 0.$$

Solução. Fazendo novamente a substituição $y = x^2$, obtemos

$$y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Para essa equação, temos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$, logo, suas raízes são

$$y_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = -3 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = 5.$$

Como $y_1 = -3$, não existe x real tal que $x^2 = y_1$. Então, temos somente dois possíveis valores reais para x que satisfazem a equação original, a saber:

$$x_1 = -\sqrt{5} \;\; \text{e} \;\; x_2 = \sqrt{5}.$$

$\square$

A ideia de empregar uma substituição de variável para reduzir uma equação dada a uma equação de segundo grau é útil em outras circunstâncias. Vejamos um exemplo mais sofisticado (e que pode ser omitido numa primeira leitura).

Exemplo 8. *Encontre as raízes reais da equação*

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{2}{x}\right) + 6 = 0.$$

Solução. Neste exemplo, a *substituição de variáveis* $y = x + \frac{2}{x}$ transforma a equação dada na equação de segundo grau

$$y^2 - 5y + 6 = 0,$$

que tem discriminante $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$ e, portanto, raízes

$$y_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 2 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 3.$$

Para achar as raízes reais da equação original, temos de lembrar que $x + \frac{2}{x} = y$. Assim,

$$x + \frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

e

$$x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.$$

A primeira equação de segundo grau acima tem $\Delta = -4 < 0$, logo, não fornece valores reais para x. A segunda tem $\Delta = 1$, logo,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 1 \;\; \text{ou} \;\; 2.$$

□

4 Sistemas de segundo grau

Equações de segundo grau são, por vezes, bastante úteis na análise de sistemas de equações de duas incógnitas. Vejamos alguns exemplos nesse sentido.

Exemplo 9. *Resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Solução. A segunda equação nos dá $y = 6-x$. Substituindo este valor na primeira equação do sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + (6-x)^2 = 20 &\Leftrightarrow x^2 + (36 - 12x + x^2) = 20 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0. \end{aligned}$$

Temos, então, uma equação de segundo grau onde $a = 1$, $b = -6$ e $c = 8$. Usando a fórmula de Bhaskara, calculamos $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$ e, a partir daí:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \\ \quad \text{ou} \\ \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}.$$

Quando $x = 4$, obtemos $y = 6 - x = 6 - 4 = 2$; quando $x = 2$, obtemos $y = 6 - x = 6 - 2 = 4$. Sendo assim, os possíveis pares ordenados (x, y) que resolvem o sistema são $(4, 2)$ ou $(2, 4)$. $\square$

Exemplo 10. *Resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 18 \\ x - y = -3. \end{cases}$$

Solução. A partir da segunda equação, obtemos $x = y - 3$. Substituindo essa expressão para x na primeira equação, segue que:

$$\begin{aligned} (y-3)^2 + 2y^2 = 18 &\Leftrightarrow (y^2 - 6y + 9) + 2y^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara (faça isso!), concluímos que os possíveis valores para y são 3 e -1. No caso em que $y = 3$, obtemos $x = 3 - 3 = 0$; no caso em que $y = -1$, obtemos $x = -1 - 3 = -4$. Sendo assim, os possíveis valores para o par ordenado (x, y) são $(0, -3)$ ou $(-4, -1)$. $\square$

Exemplo 11. *Resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$$

Solução. Inicialmente, observe que não é difícil "chutar" algumas soluções do sistema acima. Realmente, parando por um momento para procurar "de cabeça" dois números reais com soma 9 e produto 20, pensamos facilmente em $x = 5$ e $y = 4$, ou vice-versa.

Nesse caso, a virtude da fórmula de Bhaskara será garantir que essas são as *únicas* soluções. De fato, a primeira equação dá $y = 9 - x$. Então, substituindo essa expressão na segunda equação, ficamos com $x(9 - x) = 20$ ou, o que é o mesmo,

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Essa equação de segundo grau tem discriminante $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1$, logo,

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 4 \text{ ou } 5,$$

conforme suspeitamos. □

Ainda em relação ao exemplo anterior, veja que os coeficientes dessa equação de segundo grau são exatamente os segundos membros das equações do sistema $x^2 - 9x + 20 = 0$. Teremos mais a dizer sobre isso na próxima aula, com desdobramentos surpreendentes.

Dicas para o Professor

O conteúdo desta segunda parte é bem mais desafiador, do ponto de vista algébrico, que o da primeira parte. Por isso, sugerimos que sejam destinados pelo menos três encontros de 50 minutos a ele.

A demonstração da fórmula de Bhaskara exige que o aluno tenha uma boa familiaridade com manipulações algébricas, uma vez que é preciso, ainda, que esteja clara a distinção entre os papéis das constantes a, b e c e da variável x. Observamos que a demonstração, apesar de um pouco longa, segue exatamente os mesmos passos que foram executados com valores numéricos para a, b e c, na primeira parte do material; avaliamos que seja importante frisar isso para os alunos, a fim de desmistificar a fórmula geral.

As referências abaixo discutem equações de segundo grau exaustivamente, contemplando tanto o material discutido aqui quanto aquele porvir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Terceira edição. SBM, Rio de Janeiro, 2024.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.