Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 1

O Teorema do Sanduíche

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de abril de 2021

Continuando nosso estudo de limites, o resultado a seguir é conhecido no Cálculo como o **teorema do confronto** ou, ainda, o **teorema do sanduíche**. Conforme veremos após sua prova, ele é muito útil para o cálculo de limites. Em tudo o que segue, I denota um intervalo.

Teorema 1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $f,g,h : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x)$ pertence ao intervalo de extremidades $f(x)$ e $h(x)$, para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, então $\lim_{x\to x_0} g(x)$ também existe e é igual a L.*

Antes de apresentarmos a demonstração do teorema do confronto, algumas observações sobre o enunciado são úteis. Primeiramente, veja que a condição "*$g(x)$ pertence ao intervalo de extremidades $f(x)$ e $h(x)$, para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$*" significa que, para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$, tem-se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ou $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$. Por outro lado, observe que $x_0 \notin I \setminus \{x_0\}$; portanto, como as funções f, g e h estão definidas em $I \setminus \{x_0\}$, não podemos falar dos valores $f(x_0)$, $g(x_0)$ ou $h(x_0)$.

Prova do teorema do confronto. Dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que as condições $x \in I$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ impliquem $|g(x) - L| < \epsilon$. Para tanto, se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, então $f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L$ e, a partir daí, é fácil concluir que

$$|g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|,|h(x) - L|\}. \tag{1}$$

Se $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$, obtemos, de modo análogo, a validade de (1).

Agora, invocando a definição de limite, sabemos que existem números reais $\delta_1,\delta_2 > 0$, tais que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon.$$

Portanto, se $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, temos $\delta > 0$ e

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - L| < \epsilon \\ |h(x) - L| < \epsilon \end{cases}.$$

Assim, para $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$|g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|,|h(x) - L|\} < \epsilon,$$

conforme desejado. $\square$

O teorema do confronto torna possível calcularmos o **limite trigonométrico fundamental**, o qual tem grande importância para o desenvolvimento do Cálculo, especialmente no que se refere ao conceito de *derivada*, que estudaremos mais à frente. No que segue, assumiremos, por enquanto sem demonstração, que

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1. \tag{2}$$

Teorema 2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

Prova. Como queremos calcular um limite, podemos nos restringir ao intervalo $|x| < \frac{\pi}{2}$. Suponha, primeiro, que $x > 0$. Sendo $\ell(\overparen{AB}) = x$ o comprimento do arco $\overparen{AB}$ (figura 1), temos

$$\operatorname{sen} x = \overline{BD} < \overline{AB} < \ell(\overparen{AB}) = x$$

ou, ainda,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Por outro lado, é bem sabido (capítulo 5 de [2], por exemplo) que a área do setor circular AOB é igual a $\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$, ao passo que a área do triângulo AOC é igual a

$$\frac{1}{2}\overline{AO} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

(uma vez que $\overline{AO} = 1$). Então, como o setor circular AOB está contido no triângulo AOC, segue que $\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ ou, o que é o mesmo,

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

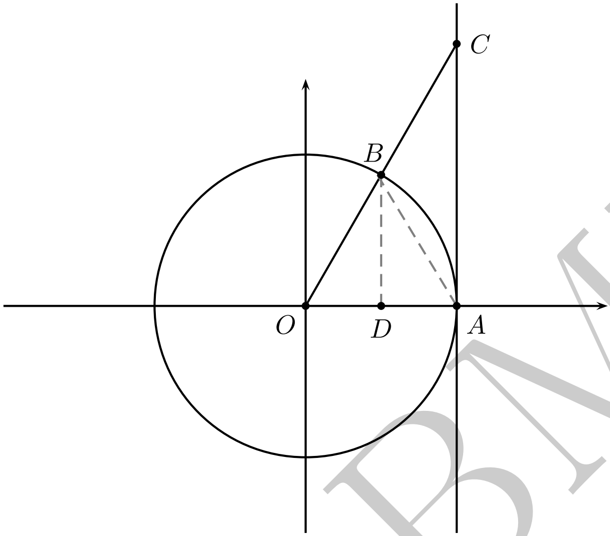

Figura 1: o limite trigonométrico fundamental.

Combinando essas duas desigualdades, obtemos

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{3}$$

Como as funções $x \mapsto \cos x$ e $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ são pares, tais desigualdades continuam verdadeiras para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Então, segue de (3), juntamente com o teorema do confronto e (2), que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ existe e é igual a 1. $\square$

Exemplo 3. *Em cada um dos itens abaixo, calcule os limites em questão:*

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$.

Solução. Para o item (a), multiplicando o numerador e o denominador por $1+\cos x$, obtemo

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}.\end{aligned}$$

Agora, as propriedades básicas de limites e o limite trigonométrico fundamental dão

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Por outro lado, segue de (2) que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\lim_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Então,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Para o item (b), começamos escrevendo

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}.$$

Agora, observando que $x\to 0$ se, e só se, $2x\to 0$ (resp. $3x\to 0$) e aplicando o limite trigonométrico fundamental, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}\right)\\ &= \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\right)^{-1}\\ &= \frac{2}{3}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)^{-1}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Por fim, para (c), fazendo $y = \sqrt[3]{\cos x}$, a identidade algébrica

$$1 - y = \frac{1-y^3}{1+y+y^2}$$

dá

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2} &= \frac{1-\cos x}{(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos x}^2)x^2}\\ &= \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos x}^2}.\end{aligned}$$

Agora, como

$$|x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x \leq 1 \Rightarrow \cos x < \sqrt[3]{\cos x} \leq 1,$$

e $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, o teorema do confronto garante que

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\cos x} = 1.$$

Então, as propriedades básicas de limites dão

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos x}^2} = \frac{1}{1+1+1^2} = \frac{1}{3}.$$

Por fim, como $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ por (a), concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos x}^2}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos x}^2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$\square$

Voltando ao teorema do confronto, uma observação importante é que ele continua válido *no infinito*, com o seguinte enunciado.

Teorema 4. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f,g,h : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x)$ pertence ao intervalo de extremidades $f(x)$ e $h(x)$, para todo $x > a$. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = L$, então $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ também existe e é igual a L.*

A demonstração é essencialmente a mesma; basta substituir I por $(a, +\infty)$ e a desigualdade $0 < |x - x_0| < \delta$ por $x > M$ (e, da mesma forma, $0 < |x - x_0| < \delta_1$ por $x > M_1$ e $0 < |x - x_0| < \delta_2$ por $x > M_2$), tomando, ao final, $M = \max\{M_1,M_2\}$. Deixamos a verificação dos detalhes como exercício para você.

Exemplo 5. *Calcule, se existir,* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Prova. Inicialmente, recorde que $-1 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$, de sorte que, para $x > 0$, temos

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Agora, como

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

o teorema do confronto no infinito garante que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ existe e também vale 0. $\square$

Outra ferramenta muito útil no que concerne o cálculo de limites, e que dá uma maneira alternativa de abordar exemplos como o anterior, é dada pela próxima proposição. Para o enunciado da mesma, recorde que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *limitada* se existir $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \forall\, x \in I.$$

Proposição 6. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $f,g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funções tais que f é limitada em $I \setminus \{x_0\}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Então, $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$, mesmo que não exista $\lim_{x\to x_0} f(x)$.*

Prova. Dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x)| < \epsilon.$$

Para tanto, se $M > 0$ é tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$, então $|f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$ para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$, e basta encontrarmos $\delta > 0$ tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x)| < \frac{\epsilon}{M}.$$

Para o que falta, é suficiente observarmos que a definição de limite, aplicada a $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, garante a existência de $\delta > 0$ tal que essa última implicação seja verdadeira. □

Exemplo 7. *Calcule, se existir,* $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Solução. Se $f,g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$, então $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Portanto, segue da proposição anterior que

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} f(x)g(x) = 0.$$

□

Ainda em relação ao exemplo anterior, é possível mostrar que o limite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ não existe.

O próximo exemplo está para a proposição 6 assim como o teorema do confronto no infinito está para o teorema 4.

Exemplo 8. *Se $f,g : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, *prove que* $\lim_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$. *Em seguida, use este fato para calcular o limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x + \cos x}.$$

Solução. Deixamos a primeira parte como exercício, sugerindo-lhe adaptar, ao presente caso, a demonstração da proposição 6.

Para calcular o limite pedido, observe inicialmente que as desigualdades $-1 \le \cos x \le 1$ garantem que

$$x - 1 \le x + \cos x \le x + 1.$$

Assim, para $x > 1$, temos

$$\frac{1}{x-1} \ge \frac{1}{x+\cos x} \ge \frac{1}{x+1}.$$

Agora, como $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, concluímos, pelo teorema do confronto no infinito, que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\cos x} = 0.$$

Voltando ao limite pedido, temos $|\operatorname{sen} x| \le 1$ para todo x e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\cos x} = 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x+\cos x} \right) = 0.$$

$\square$

Terminamos este material com um resultado correlato aos discutidos acima, que também será deixado como exercício para você.

Teorema 9. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $f,g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$. Se os limites $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existem, então $\lim x \to x_0 f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.*

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em dois encontros de 50 minutos, tempo suficiente para discutir os resultados e os exemplos apresentados. Contudo, caso o professor disponha de mais tempo, achamos instrutivo trazer mais alguns exemplos para discussão em um segundo encontro. Nesse último caso, é interessante reservar um tempo para que os estudantes tentem responder as questões que você proporá, utilizando as questões discutidas no primeiro encontro como modelo e, possivelmente, pequenas sugestões que você dê à medida que perceber algum progresso.

Insista para que aqueles que apresentarem soluções corretas venham à lousa, expô-las aos colegas. Isso é algo que frequentemente faz com que os estudantes não se sintam à vontade, mas é excelente oportunidade para aprenderem a explicar suas ideias aos outros, trazendo benefícios para além da Matemática.

A referência [1] contém mais exercícios relacionados ao teorema do confronto e suas variantes, bem como ao limite trigonométrico fundamental. Nela, você também encontrará uma demonstração da inexistência do limite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo.* Coleção Profmat. SBM, Rio de Janeiro, 2015.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume 2; Geometria Euclidiana Plana.* Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2013.