Material Teórico - Módulo Problemas Envolvendo Áreas

Problemas Envolvendo Áreas - Parte 1

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

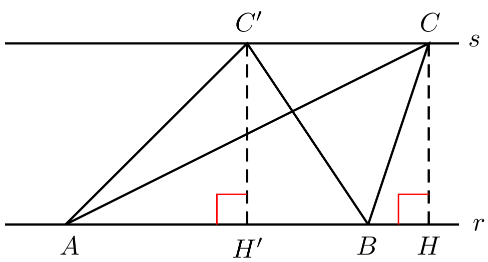
28 de janeiro de 2018

Portal da Matemática
OBMEP

1 Problemas envolvendo áreas

Nesta aula, apresentaremos mais alguns problemas que envolvem o cálculo de áreas de figuras planas. Iniciamos com o resultado abaixo, o qual possui uma demonstração bastante simples mas traz uma propriedade importante sobre áreas de triângulos, a qual será utilizada nos três exemplos seguintes.

Proposição 1. *Considere os triângulos ABC e ABC', com $A, B \in r$ e $C, D \in s$, em que r e s são retas paralelas (veja a figura abaixo).*



Então

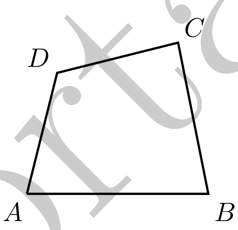
$$[ABC] = [ABD].$$

Prova. Note que as alturas dos dois triângulos, CH e $C'H'$, têm a mesma medida, pois o quadrilátero $CC'H'H$ é um retângulo (uma vez que tem lados opostos paralelos e dois ângulos adjacentes medindo $90°$). Daí, temos

$$[ABC] = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{C'H'}}{2} = [ABC'].$$

□

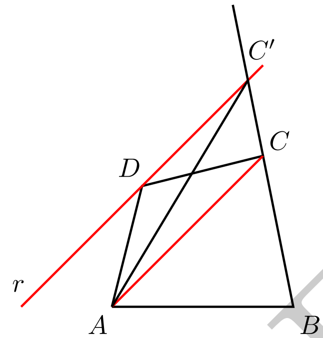
Exemplo 2. *Construa um triângulo que possui a mesma área do quadrilátero $ABCD$ dado na figura abaixo.*



Solução. Sejam r a reta paralela à diagonal AC que passa pelo vértice D e C' o ponto de interseção de r com o prolongamento do lado BC (veja a figura a seguir).

Afirmamos que

$$[ABCD] = [ABC'].$$



Com efeito, o resultado da Proposição 1, juntamente com o paralelismo de $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{C'D}$, fornece

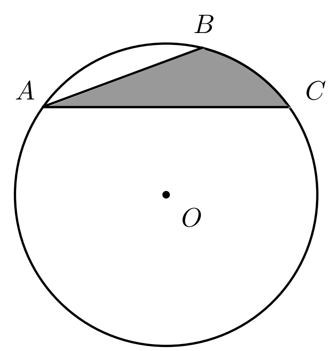
$$[ACD] = [ACC'].$$

A partir daí, segue que

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [ABC] + [ACD]\\ &= [ABC] + [ACC']\\ &= [ABC'].\end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Na figura abaixo, temos um círculo de centro O e área 1, no qual estão traçadas duas cordas AB e AC, tais que $A\widehat{O}B = 70^o$ e $B\widehat{A}C = 20^o$. Calcule a área da região pintada de cinza.*



Solução. Inicialmente, recorde que (pelo Teorema do Ângulo Inscrito) a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle BOC$, ou seja,

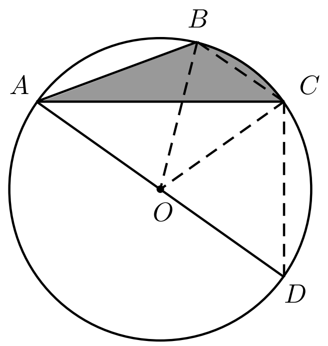
$$B\widehat{O}C = 2 \cdot B\widehat{A}C = 2 \cdot 20^{\circ} = 40^{\circ}.$$

Assim, se D é o ponto sobre o círculo tal que AD é um diâmetro (veja a próxima figura), temos

$$180^{\circ} = A\widehat{O}B + B\widehat{O}C + C\widehat{O}D$$

e, a partir daí,

$$C\widehat{O}D = 180^{\circ} - 70^{\circ} - 40^{\circ} = 70^{\circ}.$$



Agora, a igualdade dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle DOC$ permite concluir facilmente que $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas. Realmente, invocando uma vez mais o Teorema do Ângulo Inscrito, temos

$$B\widehat{C}A = \frac{1}{2}A\widehat{O}B = \frac{1}{2}\cdot 70^{\text{o}} = 35^{\text{o}}$$

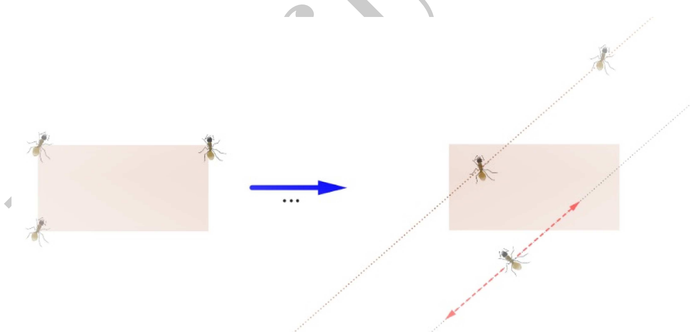
e

$$C\widehat{A}D = \frac{1}{2}C\widehat{O}D = \frac{1}{2}\cdot 70^{\text{o}} = 35^{\text{o}},$$

de sorte que $\angle BCA$ e $\angle CAD$ são ângulos alternos internos congruentes, quando as retas paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{AC}$. Portanto, $[ABC] = [OBC]$ e, desse modo, a área da região pintada de cinza é igual à área do setor circular determinado pelo arco $\overset{\frown}{BC}$.

Finalmente, como o ângulo central $\angle BOC$ mede 40^{o}, temos que a área do setor circular em questão é igual $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ da área do círculo. Como o círculo tem área igual a 1, a área da região acinzentada é igual a $\frac{1}{9}$. □

Exemplo 4 (Olimp. Argentina). *Três formigas estão paradas em três dos quatro vértices de um retângulo no plano. As formigas movem-se no plano, uma por vez. A cada vez, a formiga que se move o faz na direção da reta paralela à reta determinada pelas posições das outras duas formigas. É possível que, após alguns movimentos, as formigas se situem nos pontos médios de três dos lados do retângulo?*

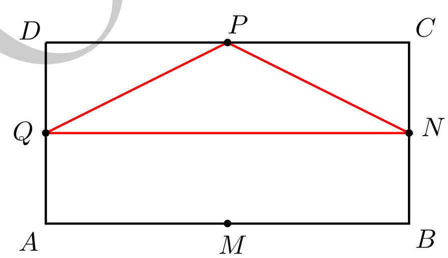


Solução. Veja que, após o movimento de qualquer uma das formigas, a área do triângulo cujos vértices são as suas posicões não se altera. Isso acontece graças à Proposição 1, uma vez que dois dos vértices permanecem fixos e o terceiro vértice (aquele correspondente à formiga que se move) estará localizado sobre a reta que é paralela à reta que passa pelos dois vétices que permaneceram fixos. Assim, após uma quantidade finita de movimentos, a área do triângulo formado pelas posições das formigas é igual à área do triângulo original, que, por sua vez, é igual à metade da área do retângulo original.

Por outro lado, se denominarmos os pontos médios dos lados AB, BC, CD e AD por M, N, P e Q, respectivamente (veja a figura a seguir), percebemos que há quatro triângulos cujos vértices são três desses pontos médios. Para o triângulo em vermelho na figura (o argumento para as demais possibilidades é completamente análogo), temos

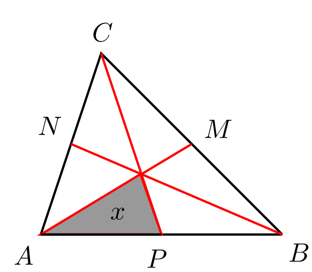
$$\begin{aligned}[NPQ] &= \frac{1}{2}\cdot\overline{NQ}\cdot\overline{CN} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{BC} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{4}\cdot[ABCD].\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que não é possível que, após um número finito de movimentos, as formigas se situem sobre pontos médios dos lados do retângulo. □



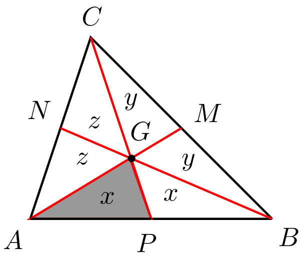
Para os próximos exemplos, recorde que, em todo triângulo, os segmentos que unem os vértices aos pontos médios dos lados opostos (as *medianas* do triângulo) passam por um mesmo ponto, o *baricentro*. Ademais, o baricentro divide cada mediana em dois segmentos, tais que o segmento que parte do vértice tem comprimento igual ao dobro do outro.

Exemplo 5. *Calcule a área da região pintada de cinza na figura abaixo, sabendo que $[ABC] = 1$ e que M, N e P são os pontos médios dos lados do triângulo.*



Solução. Conforme mencionamos anteriormente, as medianas AM, BN e CP de ABC concorrem no baricentro G de ABC.

Agora, veja que $[APG] = [BPG]$, pois as bases AP e BP possuem a mesma medida e as alturas relativas a essas bases também têm medidas iguais. Denotaremos o valor comum dessas áreas por x, conforme mostrado na figura abaixo. Analogamente, temos $[BMG] = [CMG] = y$ e $[ANG] = [CNG] = z$.



Como G é o baricentro de ABC, já observamos que $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{PG}$. Observe, ainda, que as alturas dos triângulos ACG e APG relativas às bases CG e PG são iguais. Denotando a altura comum dos dois triângulos por h, obtemos:

$$\begin{aligned}[ACG] &= \frac{1}{2} \cdot \overline{CG} \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{PG} \cdot h \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{PG} \cdot h \\ &= 2[APG].\end{aligned}$$

Mas, como $[ACG] = 2z$ e $[ACG] = x$, concluímos que $2z = 2x$, ou seja, $z = x$.

De modo análogo, obtemos $y = x$, de sorte que

$$[ABC] = 2(x + y + z) = 6x.$$

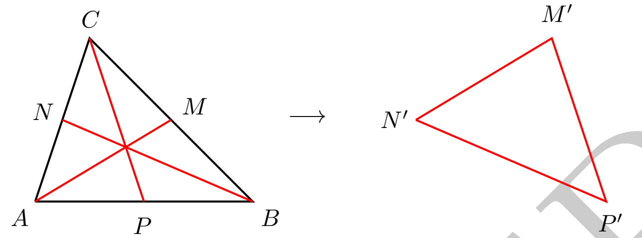
Assim,

$$[APG] = x = \frac{1}{6} \cdot [ABC] = \frac{1}{6}.$$

□

Para o próximo exemplo, assumimos sem demonstração que, com as medianas de um triângulo, sempre podemos construir um novo triângulo. A justificativa para a validade dessa propriedade das medianas ficará evidente ao longo da solução do exemplo.

Exemplo 6. *Em um triângulo ABC, os pontos M, N e P são médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Sabendo que $[ABC] = 1$, calcule a área do triângulo $M'N'P'$, cujos lados satisfazem $\overline{N'M'} = \overline{AM}$, $\overline{P'N'} = \overline{BN}$ e $\overline{M'P'} = \overline{CP}$, ou seja, cujos lados têm medidas iguais às medidas das medianas de ABC.*



Solução. Seja G o baricentro de ABC e considere o ponto D, sobre o prolongamento da mediana CP, tal que $\overline{GP} = \overline{PD}$ (veja a figura a seguir).

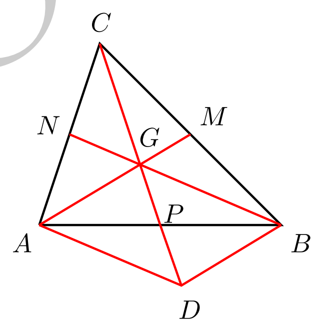
As diagonais AB e DG do quadrilátero $ADBG$ intersectam-se em seus pontos médios, logo, $ABDG$ é um paralelogramo. Também, observamos anteriormente que

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM},$$

$$\overline{AD} = \overline{GB} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BN}$$

e

$$\overline{GD} = 2 \cdot \overline{GP} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{CP} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CP}.$$



Portanto,

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{M'N'}} = \frac{GA}{AM} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{\overline{GD}}{\overline{M'P'}} = \frac{GD}{CP} = \frac{2}{3}$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{N'P'}} = \frac{AD}{BN} = \frac{2}{3}.$$

de sorte que é realmente possível construir o triângulo $M'N'P'$ (isto é, é realmente possível construir um triângulo cujos lados são iguais às medianas de um triângulo dado). Além disso, os triângulos GAD e $M'N'P'$ são semelhantes com razão de semalhança igual a $\frac{2}{3}$. Assim, concluímos que

$$\frac{[GAD]}{[M'N'P']} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Por outro lado a área de GAD é dada pela soma das áreas dos triângulos APG e APD. Mas, como $\overline{GP} = \overline{PD}$, temos que $[APG] = [APD]$. Agora, como vimos no exemplo anterior, $[APG] = \frac{1}{6}$, de sorte que

$$[GAD] = [APG] + [APD] = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$\frac{[GAD]}{[M'N'P']} = \frac{4}{9} \Longrightarrow \frac{1/3}{[M'N'P']} = \frac{4}{9}$$
$$\Longrightarrow [M'N'P'] = \frac{3}{4}.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor todos os exemplos que compõem este material. Antes de apresentar as soluções dos problemas, é fundamental que os alunos disponham de algum tempo para tentar resolvê-los sozinhos. Caso eles não consigam, o professor pode dar dicas parciais e incentivar a busca por soluções. Os alunos que conseguirem resolver algum problema sozinhos devem ser encorajados a apresentarem suas ideias para o restante da turma, na lousa.

As referências a seguir abordam o material aqui reunido em maior profundidade e trazem vários outros exemplos resolvidos e problemas propostos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Editora Atual, 2013.