Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Fórmulas de Diferenciação

Exercícios - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Março de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Este material e o próximo continuam a apresentação de exemplos relacionados às regras de diferenciação.

1 Exemplos

Iniciamos com uma regra para diferenciar a composição $f \circ g$ quando f é derivável e g é uma função afim:

$$\frac{d(f(ax+b))}{dx} = a \cdot f'(ax+b), \tag{1}$$

para qualquer x no domínio da função $x \mapsto f(ax+b)$, sendo a,b reais fixados.

A relação (1) é imediata se $a = 0$, caso em que ambos os membros se anulam. Se $a \neq 0$, fazendo $y = ax+b$ e $h = a\Delta x$, temos, pela definição de derivada,

$$\begin{aligned}\frac{d(f(ax+b))}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a(x+\Delta x)+b) - f(ax+b)}{\Delta x} \\ &= a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{a\Delta x} \\ &= a \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \\ &= a \cdot f'(y) = a \cdot f'(ax+b),\end{aligned}$$

como queríamos.

Os próximos dois exemplos fazem uso dessa regra.

Exemplo 1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, satisfazendo*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{2}$$

para quaisquer x,$y \in I$. Mostre que f é uma função afim.

Solução. Derivando a relação (2) primeiro em relação a x (interpretando y como uma constante) e depois em relação a

y (desta feita interpretando x como uma constante), obtemos, graças à fórmula (1),

$$\frac{f'(x)}{2} = \frac{f'\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} = \frac{f'(y)}{2}.$$

Concluímos, assim, a igualdade $f'(x) = f'(y)$, quaisquer que sejam $x,y \in I$. Portanto, f' é constante, digamos, $f'(x) = a$, para todo $x \in I$. Logo,

$$\frac{d(f(x) - ax)}{dx} = f'(x) - a = 0,$$

isto é, a função $I \ni x \mapsto f(x) - ax$ tem derivada nula e, assim, tal função também é constante, digamos, $f(x) - ax = b$ para todo $x \in I$. Conclui-se que $f(x) = ax + b$, ou seja, f é uma função afim. $\square$

Observação 2. *O exemplo anterior ainda é válido se a hipótese "f é derivável" for substituída por "f é monótona" ou "f é contínua". Veja o exemplo 9 da aula* Resolução de Exercícios*, no módulo* Função Afim - 9º ano*, e o exemplo 20 da aula* Continuidades Laterais e em um Intervalo*, no módulo* Funções Contínuas*.*

Agora, vamos generalizar o exemplo 16 da aula *Propriedades - Parte I*, do módulo anterior. Lá, tínhamos uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e $|f'| \leq |f|$; a conclusão foi de que f é identicamente nula.

Relendo com atenção a solução apresentada naquela ocasião, notamos que ela serve ao caso mais geral no qual f está definida em um intervalo arbitrário I, com $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in I$.

Além disso, basta que se tenha $|f'| \leq K \cdot |f|$, para alguma constante K, a fim de que f seja identicamente nula. Com efeito, se assim for, o caso $K = 0$ implica $f' \equiv 0$, de forma que f é constante e, daí, $f \equiv 0$ (uma vez que $f(x_0) = 0$). Se, por outro lado, tivermos $K > 0$, então a função linear $x \mapsto Kx$ transforma o intervalo I no intervalo $K \cdot I = \{Kx \,|\, x \in I\}$, de modo que a composição $K \cdot I \ni x \mapsto f(x/K) := g(x)$ está bem definida, é derivável e tal que $g(Kx_0) = 0$. Pela regra (1), temos $g'(x) = f'(x/K)/K$, de sorte que

$$|g'(x)| = \frac{|f'(x/K)|}{K} \leq \frac{K \cdot |f(x/K)|}{K} = |f(x/K)| = |g(x)|.$$

Pela extensão previamente comentada do exemplo 16 da aula citada, g é identicamente nula, ou melhor, $f \equiv 0$.

Portanto, podemos enunciar o

Exemplo 3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, satisfazendo*

$$|f'(x)| \leq K|f(x)|,$$

para todo $x \in I$, sendo $K \geq 0$ uma constante. Se f se anula em algum ponto de I, então f é identicamente nula.

Da regra do quociente, obtemos a seguinte fórmula para o cálculo da derivada do recíproco de uma função:

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}{dx} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}. \tag{3}$$

Verifique, como exercício, que a fórmula acima é válida em cada ponto x no qual f seja derivável e não nula.

Exemplo 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = f(x)^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é identicamente nula.*

1ª Solução. Primeiramente, note que $f' \geq 0$, de sorte que f é monótona não decrescente. Se f não fosse identicamente nula, digamos, $f(a) > 0$, com a positivo [1], poderíamos definir

[1] Esse é o único caso que interessa. De fato, supor $f \not\equiv 0$ significa assumir a existência de $a \neq 0$ tal que $f(a) \neq 0$. Pela monotonicidade de f, $a > 0 \Rightarrow f(a) \geq f(0) = 0$ (caso considerado), logo, $f(a) > 0$ (pois estamos supondo que $f(a) \neq 0$) enquanto (por um raciocínio análogo) $a < 0 \Rightarrow f(a) < 0$. Nesse último caso, trocamos f pela função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -f(-x)$. Como é fácil de ver, g é derivável, $g(0) = 0$, $g'(x) = f'(-x) = f(-x)^2 = g(x)^2$ e, agora, pondo $b = -a$, temos $b > 0$ e $g(b) > 0$.

x_0 como a maior solução da equação $f(x)=0$ no intervalo $[0,a]$. Então, $0 \le x_0 < a$ e $f>0$ no intervalo $(x_0,a]$. Assim, pela fórmula (3), teríamos

$$\frac{d\left(x+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{dx}=1-\frac{f'(x)}{f(x)^2}=0,$$

para cada $x \in (x_0,a]$, de sorte que $x \mapsto x+1/f(x)$ seria constante, digamos $1/f(x)=c-x$, para todo $x \in (x_0,a]$ e uma certa constante c. Mas, quando $x \to x_0^+$, o primeiro membro da última igualdade tende a $1/0^+=+\infty$, enquanto o 2º membro tende a $c-x_0$, o que é absurdo.

Portanto, f deve ser identicamente nula. □

2ª Solução. Se f não fosse identicamente nula, ocorreria $f(a) \neq 0$ para algum $a \neq 0$. Se K é o valor máximo da função $|f|$ restrita ao intervalo fechado I de extremos 0 e a, teríamos

$$|f'(x)|=|f(x)||f(x)| \le K|f(x)|,$$

para cada $x \in I$. Pelo exemplo anterior, $f|_I$ seria identicamente nula, o que é uma contradição. □

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Sabemos que $f' \equiv 0$ implica f constante. Além disso, se f for duas vezes derivável e $f'' \equiv 0$, f' será constante e, conforme a solução do exemplo 1, f deve ser afim. Desse modo, se $n=1$ ou 2 e f é uma função n vezes derivável, com n-ésima derivada identicamente nula, então f é uma função polinomial de grau menor que n. Na realidade, esse fato é verdadeiro para todo n natural, conforme veremos a seguir.

Exemplo 5. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável. Se $f^{(n)} \equiv 0$, então f é uma função polinomial de grau menor que n.*

Prova. Façamos a demonstração por indução em n natural, observando que já estabelecemos os casos $n=1$ e $n=2$.

Suponha, por hipótese de indução, que toda função k vezes derivável $f : I \to \mathbb{R}$, tal que $f^{(k)} \equiv 0$, é uma função polinomial de grau menor que k.

Para o passo de indução, seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função $k+1$ vezes derivável, com $f^{(k+1)} \equiv 0$. Devemos provar que f é uma função polinomial de grau menor que $k+1$. De fato, como $(f')^{(k)} = f^{(k+1)} \equiv 0$, podemos concluir, por hipótese de indução, que f' é uma função polinomial de grau menor que k, digamos,

$$f'(x) = a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Agora seja

$$P(x) = \frac{a_{k-1}}{k}x^k + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x,$$

de modo que $P'(x) = f'(x)$, ou seja, $(f - P)' \equiv 0$. Então, $f - P$ é constante e $f = P + (f - P)$ é uma função polinomial de grau $\leq k < k+1$. $\square$

Observação 6. *Durante a solução do exemplo anterior, o seguinte fato foi estabelecido: se f' é um polinômio de grau $n-1$, então f é um polinômio de grau n.*

Para o próximo exemplo, convém recordar a fórmula do *movimento retilíneo uniformemente variado* (MRUV):

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2.$$

Aqui, s_0 e v_0 são a posição e velocidade iniciais da partícula e a é a aceleração, suposta constante.

Exemplo 7. *Uma partícula se desloca em um eixo com função posição $s = s(t)$. Calcule $s(3)$, sabendo que:*

(a) *No instante $t = 0$ a partícula está em repouso, na origem.*

(b) *No intervalo de tempo* $[0,1]$ *o movimento é uniformemente variado, com aceleração positiva.*

(c) *No intervalo de tempo* $[1,3]$ *a taxa de variação da aceleração é uma constante não nula.*

(*d*) *No instante $t = 2$ a partícula retorna à origem, com velocidade escalar unitária.*

Solução. Seja $a = a(t)$ a aceleração da partícula. Pelas condições (a) e (b), temos $s(t) = \frac{a_0}{2}t^2$ para cada $t \in [0,1]$, em que $a_0 = a(0) > 0$. No intervalo $[1,3]$, $s'''(t) = a'(t) =: b_0$ é uma constante não nula, de sorte que, por sucessivas aplicações da observação 6, $s(t)$ é um polinômio de grau 3 em t naquele intervalo de tempo.

Pelo exemplo 13 da aula *Propriedades - Parte II* (módulo anterior) vale

$$s(t) = s(1) + s'(1)(t-1) + \frac{s''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{s'''(1)}{6}(t-1)^3,$$

para $1 \leq t \leq 3$. Por outro lado, a fórmula $s(t) = \frac{a_0}{2}t^2$ dá $s(1) = a_0/2$ e $s'(1) = s''(1) = a_0$, de forma que

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + a_0(t-1) + \frac{a_0}{2}(t-1)^2 + \frac{b_0}{6}(t-1)^3,$$

para cada $t \in [1,3]$. Em particular, nesse mesmo intervalo de tempo, vale

$$s'(t) = a_0 + a_0(t-1) + \frac{b_0}{2}(t-1)^2.$$

Ademais, de acordo com a condição (d), $s(2) = 0$ e $s'(2) = -1$, ou seja,

$$2a_0 + b_0/6 = 0 \quad \text{e} \quad 2a_0 + b_0/2 = -1.$$

Resolvendo o sistema formado por tais equações, encontramos $a_0 = 1/4$ e $b_0 = -3$, de onde segue que

$$s(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 8 = -23/8.$$

$\square$

Exemplo 8. *Sejam $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F e diretriz d. Dado $P \in d$, as tangentes à parábola por P tocam essa curva nos pontos A e B. Mostre que F pertence ao segmento AB.*

Solução. Se escolhermos os eixos de modo que $\mathcal{P}$ tenha equação $y = mx^2$, então $F = (0,1/(4m))$ e $d : y = -1/(4m)$. Se $A = (a,ma^2)$ e $B = (b,mb^2)$, sabemos que as tangentes r e s a $\mathcal{P}$ naqueles pontos têm equações

$$r : y = 2max - ma^2 \;\text{ e }\; s : y = 2mbx - mb^2.$$

Essas retas cruzam a diretriz d nos pontos

$$P_r = (x_r, -1/(4m)),\ P_s = (x_s, -1/(4m)),$$

em que $2max_r - ma^2 = -1/4m = 2mbx_s - mb^2$, ou seja, $x_r = a/2 - 1/(8m^2a)$ e $x_s = b/2 - 1/(8m^2b)$.

Porém, o problema informa que $P_r = P_s = P$, o que nos leva à relação $x_r = x_s$, ou seja,

$$a/2 - 1/(8m^2a) = b/2 - 1/(8m^2b).$$

A partir daí, é imediato que

$$\frac{b-a}{2} = \frac{a-b}{8m^2ab},$$

implicando $ab = -1/(4m^2)$, pois A e B são pontos distintos. Daí, sem perda de generalidade, suponhamos $a < 0 < b$.

Lembre, da aula *Propriedades - Parte III* (módulo anterior), que os pontos do segmento AB são da forma

$$X_t = ((1-t)a + tb, (1-t)ma^2 + tmb^2),$$

para $0 \le t \le 1$. Então, o possível valor t_0 de t permitindo a igualdade $X_{t_0} = F$ deve satisfazer $(1-t_0)a + t_0b = 0$, logo, $t_0 = -a/(b-a)$. Note que, por nossas escolhas, $t_0 > 0$ e $1 - t_0 = b/(b-a) > 0$, isto é, $t_0 \in (0,1)$. Além disso,

$$\begin{aligned}(1-t_0)ma^2 + t_0mb^2 &= \frac{b}{b-a}\cdot ma^2 - \frac{a}{b-a}\cdot mb^2\\ &= \frac{(ba^2 - ab^2)m}{b-a} = \frac{ab\cancel{(a-b)}m}{\cancel{b-a}}\\ &= -abm = \frac{1}{4m},\end{aligned}$$

ou seja, $X_{t_0} = F$ e, portanto, $F \in AB$. $\square$

Observação 9. *Nas notações do exemplo anterior, ABP é um triângulo retângulo em P. De fato, as retas $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ têm inclinações $1/2a$ e $1/2b$, respectivamente. Como $\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} = -1$, segue a afirmação.*

Exemplo 10. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável com a seguinte propriedade: as retas normais ao gráfico de f passam todas por um mesmo ponto do plano. Mostre que o gráfico de f é um arco de circunferência.*

Solução. Transladando os eixos, se necessário, podemos supor que o ponto no qual as normais ao gráfico de f concorrem é a origem $(0,0)$. Assim, espera-se que o gráfico de f esteja contido numa circunferência centrada na origem, suspeita que será confirmada se provarmos que a distância do ponto $(x,f(x))$ sobre o gráfico à origem $(0,0)$, ou seja, a quantidade $\sqrt{x^2 + f(x)^2}$ independe de x (nesse caso, $\sqrt{x^2 + f(x)^2}$ deve ser o raio da circunferência).

Evidentemente, isso equivale a mostrar que a quantidade $x^2 + f(x)^2$ independe de x; também, como sabemos, isso equivale ao anulamento da derivada da função $I \ni x \mapsto x^2 + f(x)^2$.

Pois bem, em cada ponto $(x,f(x))$ do gráfico, a reta normal tem equação $Y - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$. Como essa reta passa pela origem, segue a igualdade $-f(x) = \frac{x}{f'(x)}$, a qual pode ser reescrita na forma

$$x + f(x)f'(x) = 0. \tag{4}$$

O argumento acima funciona apenas no caso em que $f'(x) \neq 0$. Não obstante, mesmo que $f'(x)$ se anule, a igualdade (4) persiste. De fato, nessas circunstâncias, a tangente ao gráfico de f no ponto $(x,f(x))$ será uma reta horizontal; assim, a normal ao gráfico de f no mesmo ponto será uma reta vertical, passando por $(x,f(x))$ e pela origem, o que implica $x = 0$ e garante a permanência da validade da relação (4).

Agora, ficou fácil terminar o problema. Realmente,

$$\frac{d(x^2 + f(x)^2)}{dx} = 2(x + f(x)f'(x)) = 0;$$

então, fixando $x_0 \in I \setminus \{0\}$ e definindo $R = \sqrt{x_0^2 + f(x_0)^2}$, obtemos

$$x^2 + f(x)^2 = R^2$$

para todo $x \in I$. Portanto, o gráfico de f está contido na circunferência de raio R com centro na origem. $\square$

Dicas para o Professor

Ainda há uma importante regra de derivação a ser estudada, a saber, a *Regra da Cadeia*. Tal regra, título de um módulo futuro, garante a diferenciabilidade da composição $g \circ f$ de duas funções deriváveis f e g, estabelecendo a relação $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$. Por exemplo, as fórmulas (1) e (3) são casos particulares dessa regra (verifique).

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.