Material Teórico - Módulo de UNIDADES DE MEDIDA DE COMPRIMENTO E DE ÁREAS

Unidades de Medida de Área e Exercícios

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

06 de Fevereiro de 2021

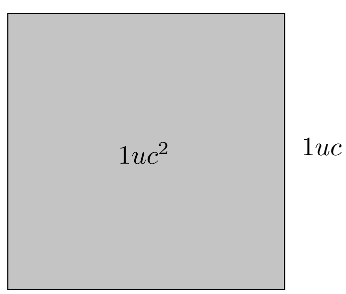
PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Neste material, estudaremos outro conceito básico em Geometria: a noção de **área**. Intuitivamente, a área de um objeto plano é uma medida da porção do plano que essa figura ocupa. Assim, ao falarmos sobre áreas de figuras, é necessário mencionarmos uma *unidade de medida de área*, a qual estará associada a uma medida de comprimento.

Mais especificamente, considere uma unidade de comprimento genérica (uc). Ao construir um quadrado de lado $1uc$, obtemos, por definição, uma figura de área $1uc^2$. Ou seja, uc^2 é a unidade de medida de área correspondente à unidade de medida de comprimento uc.

Exemplo 1. *Um quadrado de lado* $1m$*, tem área* $1m^2$ *(lê-se* ***um metro quadrado****), enquanto um quadrado que tem lado* $1cm$ *tem área* $1cm^2$ *(lê-se* ***um centímetro quadrado****).*

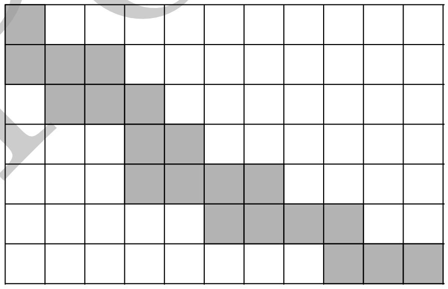


Além da própria definição, também contamos com os dois axiomas abaixo, os quais nos permitem calcular áreas de outras figuras planas a partir de um conceito intuitivo de comparação.

Axioma 1. Se uma figura plana é dividida em duas ou mais partes, então a soma das áreas das partes é igual à área da figura original.

Axioma 2. Se duas figuras são idênticas (congruentes), então elas possuem áreas iguais.

Exemplo 2. *Na grade quadriculada a seguir, cada quadrado menor tem área igual a* $3cm^2$*. Qual é a área da região cinza?*



Solução. A figura é formada por diversos quadrados. Contando os quadrados por linhas, sendo a primeira linha aquela da parte superior da figura, temos:

- 1 quadrado na primeira linha;
- 2 quadrados na quarta linha;
- 3 quadrados nas linhas 2, 3 e 7;
- 4 quadrados nas linhas 5 e 6.

Assim, temos um total de

$$1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 = 20$$

quadrados. Como cada um tem área $3cm^2$, a área da figura é igual a $20 \times 3 = 60cm^2$. □

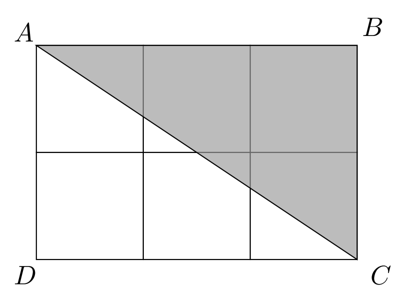
A seguir, enunciamos uma consequência importante dos axiomas acima:

Fato 1. A área de um retângulo de comprimento x e altura y é dada por xy.

No exemplo a seguir, utilizaremos o Axioma 1 para dar uma indicação da validade do "Fato 1" e calcular a área de um triângulo.

Exemplo 3. *Considere um retângulo* $ABCD$*, de lados* 2 *e* 3 *metros. Observando a figura a seguir, note que o retângulo pode ser particionado em seis quadrados, de lado* $1m$ *cada, através de um corte horizontal e dois cortes verticais. Assim, cada um dos quadrados possui área* $1m^2$*, de sorte que, pelo Axioma* 1*, o retângulo* $ABCD$ *tem área* $6m^2$*.*

Note, ainda, que a diagonal AC *divide o retângulo em dois triângulos congruentes. Portanto, ambos têm a mesma área, que deve ser igual à metade da área de* $ABCD$*. Logo, a área do triângulo* ABC *é* $3m^2$*.*



Na primeira parte do exemplo anterior, note que $6 = 2 \times 3$, o que está de acordo com o Fato 1. Também, é imediato que um argumento análogo nos levaria a concluir que um retângulo de dimensões $10m$ e $4m$ tem área $10 \times 4 = 40m^2$: basta dividi-lo (por meio de cortes horizontais e verticais) em $10 \times 4 = 40$ quadrados de lados $1m$ cada. Em verdade, o Fato 1 é verdadeiro quaisquer que sejam as dimensões do retângulo.

Da mesma forma a segunda parte do exemplo calculou a área de um triângulo com um ângulo reto (o triângulo ABC), mostrando que ela é igual à metada da área do retângulo $ABCD$.

Claramente, o argumento utilizado vale para todo triângulo com um ângulo reto: sua área é igual à metade do produto dos lados do ângulo reto. Mais geralmente, temos o

Fato 2. A área de um triângulo é igual à metade do produto de um lado pela distância do terceiro vértice a esse lado.

Na próxima seção, utilizaremos os axiomas 1 e 2 e os fatos 1 e 2 para calcular várias áreas interessantes.

2 Exercícios

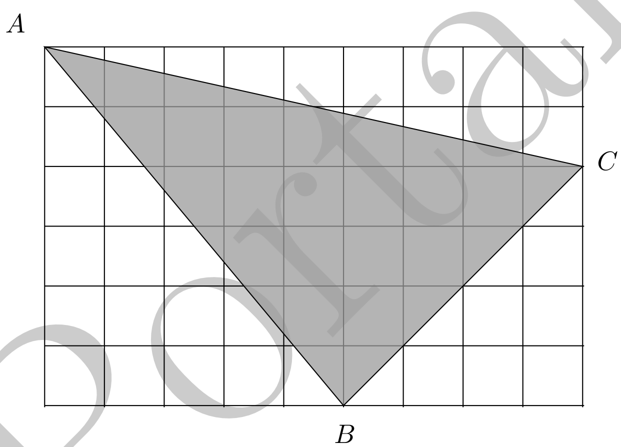
Exercício 4 (PUC RIO-2008)**.** *Um festival foi realizado num campo retangular, de $240m$ por $45m$. Sabendo que em cada $2m^2$ havia, em média, 7 pessoas, quantas pessoas havia, aproximadamente, no festival?*

Solução. A área do campo é $240 \times 45 = 10.800m^2$. Uma vez que a cada $2m^2$ há 7 pessoas em média, teremos um total de

$$10.800 \times \frac{7}{2} = 37.800$$

pessoas. □

Exercício 5. *Na figura a seguir, temos um triângulo ABC com vértices sobre uma grade quadriculada, em que cada quadrado menor tem área $1cm^2$. Calcule sua área.*



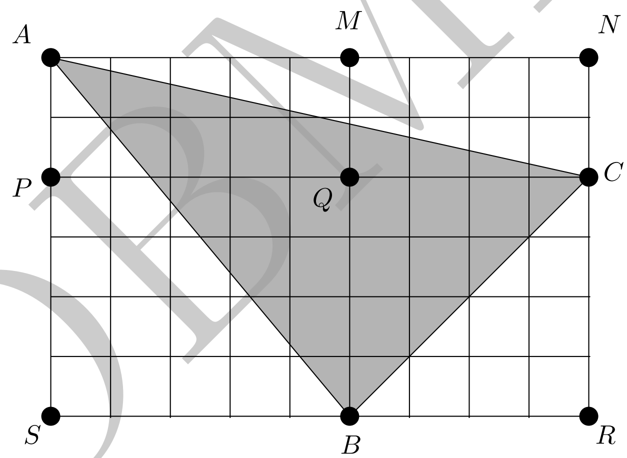
Solução. Considere os pontos M, N, P, Q, R, S sobre a grade quadriculada, conforme mostrados na próxima ilustração. Note que:

- A área do triângulo ASB é metade da área do retângulo $ASBM$, que é igual a $5 \times 6 = 30$. Logo, a área do triângulo ASB é igual a 15.
- A área do triângulo CBR é metade da área do retângulo $CQBR$, que é igual a $4 \times 4 = 16$. Logo, a área do triângulo CBR é igual a 8.
- A área do triângulo ANC é metade da área do retângulo $ANCP$, que é igual a $2 \times 9 = 18$. Logo, a área do triângulo ANC é igual a 9.

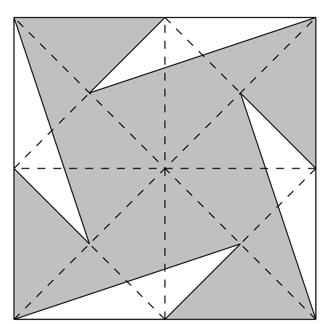
Por fim, veja que a área do triângulo ABC é igual a área do retângulo $ANRS$ menos a soma das áreas dos triângulos ASB, CBR e ANC. Ou seja, a área de ABC é igual a:

$$(9 \times 6) - (15 + 8 + 9) = 54 - 32 = 22cm^2.$$

□



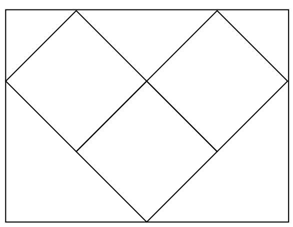
Exercício 6 (OBMEP 2010 - 1^a Fase)**.** *A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em cinza corresponde a que fração da área do quadrado?*



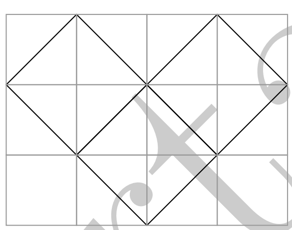
Solução. O quadrado está dividido em quatro quadrados menores iguais. Cada um dos triângulos brancos tem um lado que é um lado de um quadrado menor e sua altura, relativa a este lado, é a metade do lado do quadrado menor; logo sua área é $\frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ da área de um quadrado menor. Como são quatro desses triângulos, vemos que a área da parte branca é igual à área de $4 \times \frac{1}{4} = 1$ quadrado menor. Como área de um desses quadrados é $\dfrac{1}{4}$ da área do quadrado maior, segue que a área cinza é igual a $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ da área do quadrado maior. $\square$

Você deve ter percebido que, nos exercícios feitos até agora, calculamos áreas de figuras planas utilizando uma grade quadriculada como apoio. Nos próximos exercícios, essa grade quadriculada não estará explícita no desenho. Dessa forma, uma dica para resolvê-los é *criar* uma grade de apoio.

Exercício 7 (OBM). *Na figura a seguir, temos um retângulo circunscrito a três quadrados, cada um com* $1cm^2$ *de área. Qual é a área do retângulo?*



Solução. Divida o retângulo em 12 quadrados menores através de cortes paralelos às diagonais dos três quadrados originais, formando uma grade quadriculada, conforme ilustrado a seguir.

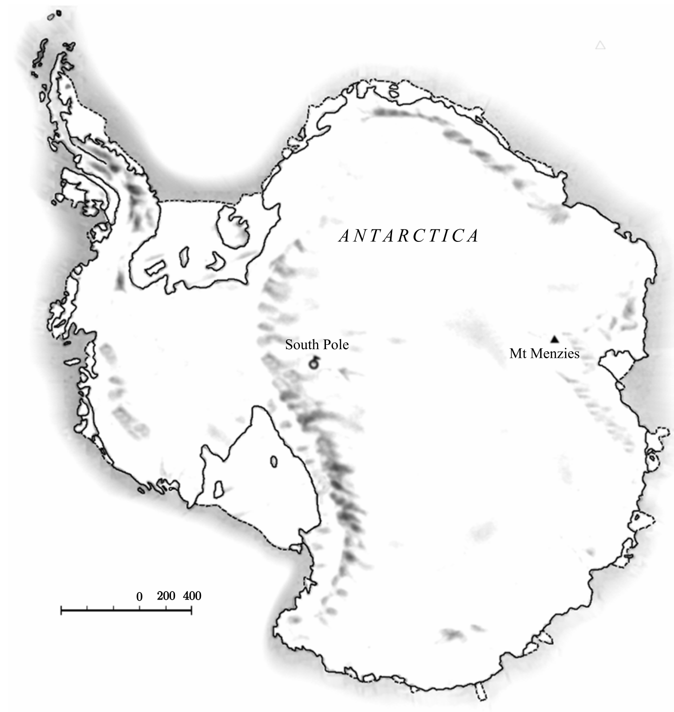


Observe que cada quadrado original é dividido em quatro triângulos menores congruentes. Portanto, cada um destes triângulos tem área $\frac{1}{4}$.

Por outro lado, a junção de dois destes triângulos formam um quadrado da grade. Portanto, cada quadrado da grade tem área $2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Assim, a área do retângulo é igual a $12\cdot\frac{1}{2}=6cm^2$. $\square$

Exercício 8 (PISA-adaptado). *No desenho a seguir, temos um mapa da Antártida, com uma escala em quilômetros. Faça uma estimativa da área do continente.*



Solução. Em primeiro lugar, utilizaremos a medida da escala para criar uma grade quadriculada em que cada quadrado tem lado igual a 200 quilômetros, logo, a área igual a $200\times 200 = 40.000km^2$ (veja a figura da próxima página):

Em seguida, construímos retângulos para estimar a área da figura. A quantidade de quadrados que compõem os retângulos destacados é:

$$12+40+189+40+52+30=363.$$

Portanto, podemos estimar o tamanho da Antártida em

$$363\times 40.000 = 14.520.000km^2.$$

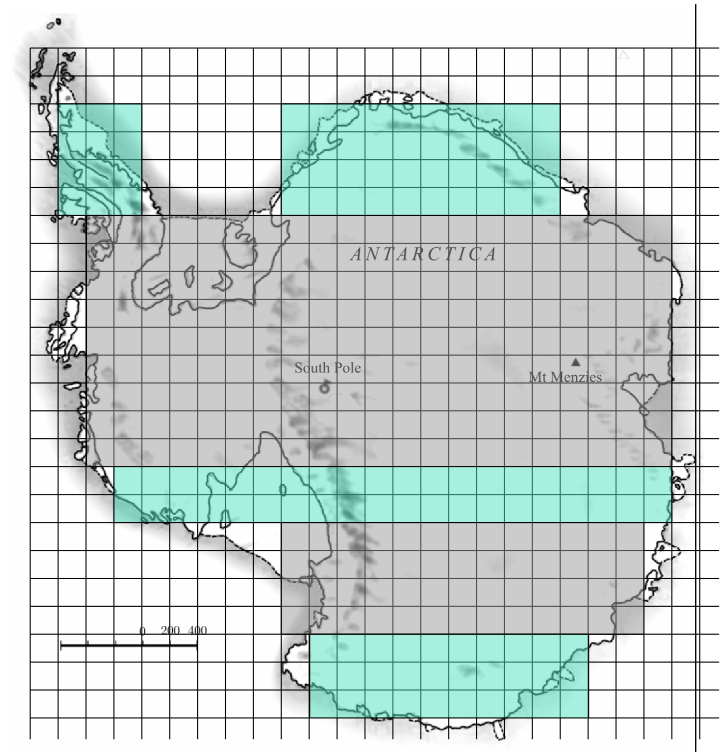
$\square$

Observação 9. *Note que o valor para a área da Antártida, estimado no exercício anterior, bem próximo no valor real* $(14.200.000km^2)$ *que pode ser encontrado na Internet.*

3 Sugestões ao professores

Uma forma de motivar seus alunos a pensarem em problemas de área envolvendo grades quadriculadas é através de geoplanos. O professor pode separar os alunos em pares e pedir que cada um deles crie figuras com vértices sobre os nós da grade. Em seguida, cada um deles desafia seu par a descobrir a área da figura formada. Caso não tenha geoplanos suficientes, sugerimos que alguns dos alunos façam suas figuras no GeoGebra.

O problema sobre o cálculo da área da Antártida pode ser adaptado para outras regiões. Tente fazer uma versão



com o mapa de sua cidade ou de seu estado. Imprima um mapa em uma única folha e separe os estudantes em grupos para cada um criar sua estratégia de estimar a área utilizando os conhecimentos adquiridos na aula.

Referências

[1] Bruno Holanda and Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 2: Primeiros passos em Geometria.* IMPA, 2020.