Material Teórico - Módulo Introdução à Probabilidade

Ferramentas básicas

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Solução do Problema dos Pontos

Conforme prometido no material da aula anterior, começaremos apresentando uma solução para o problema dos pontos. Comecemos com o seguinte caso particular, que já havíamos enunciado.

Problema 1 (Problema dos pontos). *Em um jogo entre duas equipes, o total de apostas é de* 16 *ducados (uma moeda antiga). Ganha esse valor a equipe que primeiro obtiver* 6 *pontos em uma série de partidas, cada uma das quais valendo um ponto. O jogo precisou ser interrompido em certo momento, quando a equipe A estava com* 5 *pontos e a equipe B com* 3 *pontos. Considerando-se que, ainda assim, em cada partida seguinte as duas equipes teriam chances iguais de vencer, como se deve dividir (de forma justa) as moedas entre as duas equipes?*

Solução 1. Devemos dividir as moedas entre as duas equipes de modo que cada uma receba um valor proporcional à probabilidade que ela possui de vencer o jogo, ou seja, completar os 6 pontos.

Veja que A precisa de apenas um ponto para vencer, enquanto B precisa de 3 pontos. Observe ainda que, caso elas continuassem jogando, após no máximo 3 novas partidas uma das equipes conseguiria o número de pontos necessários para vencer. A fim de obter um espaço equiprovável, vamos considerar todos os possíveis resultados dessas três partidas, conforme a tabela abaixo.

Partida 1	Partida 2	Partida 3
A	A	A
A	A	B
A	B	A
A	B	B
B	A	A
B	A	B
B	B	A
B	B	B

Como em cada partida os jogadores têm changes iguais de ganhar (cada um tem probabilidade 1/2 de ganhar cada partida), temos que esses 8 resultados são, de fato, equiprováveis. Assim, cada um deles ocorre com probabilidade 1/8. Por fim, observe que dentre essas 8 possibilidades, há 7 que são favoráveis ao jogador A e apenas uma que é favorável ao jogador B (a última linha da tabela é a única em que B consegue ganhar 3 pontos antes que A consiga ganhar um ponto). Logo, a probabilidade de A vencer o jogo é igual 7/8.

Agora, como $\frac{7}{8} \cdot 16 = 14$, concluímos que 14 das 16 moedas devem ser dadas ao jogador A e 2 devem ser dadas ao jogador B. □

Solução 2. Observe que, na realidade, é possível encerrar o jogo no momento em que um dos jogadores atinge a pontuação necessária para vencer. Sendo assim, em vários dos casos listados na tabela anterior, não há necessidade de observarmos os resultados das partidas 2 ou 3 para determinarmos o vencedor. De fato, na prática há apenas 4 possíveis situações:

(a) A vence a Partida 1. Neste caso, A vence o jogo independentemente do resultado das outras partidas.

(b) B vence a Partida 1 e A vence Partida 2. Daí, A vence o jogo independentemente do resultado da Partida 3.

(c) B vence as Partidas 1 e 2, e A vence a Partida 3. Daí, A vence o jogo.

(d) B vence as Partidas 1, 2 e 3. Neste caso, B vence o jogo.

Dentre essas 4 situações, A vence em 3 deles e B vence em uma. Por conta disso, o leitor poderia achar, erroneamente, que a probabilidade de A vencer é igual a 3/4. Mas é preciso ter bastante atenção: essas quatro possíveis situações não são equiprováveis. De fato, a situação (a) ocorre com probabilidade 1/2 (uma vez que ela depende apenas do resultado do primeira partida); a situação (b) acontece com probabilidade 1/4 (pois há 4 possíveis resultados para as duas primeiras partidas dentre os quais estamos considerando apenas um deles); e as situações (c) e (d) acontecem (cada uma) com probabilidade 1/8. Neste caso, a probabilidade de A ganhar pode ser calculada somando-se as probabilidades correspondentes aos itens (a), (b) e (c):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

□

Vamos, agora, resolver uma versão mais geral do problema anterior, para cuja solução adaptamos a primeira solução apresentada à versão anterior.

Problema 2. *Um jogo entre duas equipes é disputado em várias partidas, cada uma valendo um ponto. Ganha a equipe que primeiro conseguir acumular um total de T pontos. O jogo precisou ser interrompido em um momento onde a equipe A estava com p pontos e a equipe B com q pontos. Porém, considera-se que em cada partida seguinte as duas equipes teriam chances iguais de vencer. Qual a probabilidade da equipe A vencer o jogo?*

Solução. Sejam $m = T - p$ e $n = T - q$, e observe que a equipe A precisa de mais m pontos para ganhar, enquanto B precisa de n pontos.

Observe agora que o vencedor fica determinado após o resultado das próximas $m + n - 1$ partidas. De fato, se após essa quantidade de partidas ainda não houvesse um vencedor, então A teria ganho no máximo $m - 1$ pontos e B teria ganho no máximo $n - 1$ pontos, de modo que no máximo $(m - 1) + (n - 1) = m + n - 2$ pontos teriam sido distribuídos. Mas esse não é o caso, uma vez que as $m+n-1$ partidas jogadas teria distribuído $m+n-1$ pontos.

Então, vamos considerar como espaço amostral o conjunto de todos os 2^{m+n-1} possíveis resultados para essa sequência de $m+n-1$ novas partidas. Como em cada partida A e B têm a mesma chance de ganhar, esses 2^{m+n-1} resultados são equiprováveis. Resta, pois, calcular o número de casos favoráveis, ou seja, calcular em quantas dessas sequências de partidas o jogador A vence o jogo.

Dada um sequência em particular de resultados para as $m+n-1$ partidas, seja x o número de partidas que A ganhou. Para que A vença o jogo como um todo, é necessário que $x \geq m$. Por outro lado, como o total de partidas é $m+n-1$ sempre que $x \geq m$, o número de pontos que B irá conquistar será no máximo $m+n-1-x \leq n-1$, de forma que B não terá ganho o jogo ainda. Dito de outra maneira, independentemente da ordem em que A ganhar $x \geq m$ pontos nas $m+n-1$ partidas restantes, A irá vencer o jogo. Isto posto, é imediato que há exatamente $\binom{m+n-1}{x}$ maneiras de A ganhar o jogo fazendo exatamente x pontos, onde $x \geq m$. Variando-se o valor de x de m a $m+n-1$, obtém-se que o total de maneiras em que A pode vencer é igual a:

$$\binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m+1} + \cdots + \binom{m+n-1}{m+n-1}. \quad (1)$$

Portanto, a probabilidade de A vencer o jogo é:

$$\Pr(\text{'}A \text{ vencer'}) = \frac{\binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m+1} + \cdots + \binom{m+n-1}{m+n-1}}{2^{n+m-1}}.$$

Por fim, é claro que substituindo os valores de m e n, por $T-p$ e $T-q$, respectivamente, também podemos obter uma resposta em função de T, p e q. □

Observação 3. *Usando o fato que* $\binom{m+n-1}{m+i} = \binom{m+n-1}{n-1-i}$, *também podemos escrever a soma* (1) *como:*

$$\binom{m+n-1}{0} + \cdots + \binom{m+n-1}{n-2} + \binom{m+n-1}{n-1}.$$

Assim,

$$\Pr(\text{'}A \textit{ vencer'}) = \frac{\binom{m+n-1}{0} + \cdots + \binom{m+n-1}{n-2} + \binom{m+n-1}{n-1}}{2^{n+m-1}}.$$

2 Terminologia e fatos básicos

Descrevemos aqui o vocabulário típico usado em Teoria das Probabilidades. Suponha que temos um espaço amostral Ω, de onde iremos sortear um elemento de acordo com uma dada função de probabilidade Pr. A função Pr é comumente chamada de *distribuição*. Vimos no material anterior que um *evento* A de Ω nada mais é do que um subconjunto de Ω. A probabilidade do *evento A acontecer*, denotada $\Pr(A)$, corresponde à probabilidade do elemento sorteado pertencer ao conjunto A. Vimos também que, quando o espaço amostral Ω é finito, $\Pr(A)$ é igual à soma das probabilidades dos elementos de A.

Dizemos que dois eventos A e B de Ω são *igualmente prováveis* quando ambos possuem a mesma probabilidade (de acontecer), ou seja, quando $\Pr(A) = \Pr(B)$. O *evento impossível* corresponde ao conjunto vazio e, portanto, possui probabilidade 0 (zero). O *evento certo* corresponde ao conjunto Ω e, portanto, possui probabilidade 1 (um).

Dizemos que dois eventos A e B são *mutuamente exclusivos*, ou *disjuntos*, quando $A \cap B = \emptyset$. Isso equivale a dizer que os eventos A e B não podem acontecer simultaneamente (já que o elemento sorteado não pode pertencer a A e B ao mesmo tempo). Assim, se tivermos a informação de que um deles acontece, podemos excluir a possibilidade do outro também acontecer. Conforme havíamos observado no material anterior, a seguinte afirmação é imediata:

União de dois eventos disjuntos: se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B).$$

A propriedade acima pode ser generalizada facilmente (com a mesma demonstração) para o caso de termos k eventos $A_1, \ldots, A_k$, os quais sejam (*dois a dois*) *mutuamente exclusivos*, isto é, sejam tais que a interseção entre dois quaisquer deles seja vazia. Mais precisamente, também temos a seguinte propriedade:

União de eventos dois a dois disjuntos: se $A_1, \ldots, A_k$ são eventos (dois a dois) mutuamente exclusivos, então

$$\Pr(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \Pr(A_1) + \cdots + \Pr(A_k).$$

Dois eventos são *complementares* quando são mutuamente exclusivos e sua união é igual ao espaço amostral Ω. O (único) evento complementar a A é o evento $A^{\mathsf{C}} = \Omega - A$, que é formado pelos elementos de Ω que não estão em A. (Em alguns livros são encontradas outras notações para o complementar, tais como $\overline{A}$ ou A^{c}.) Veja que $\Pr(A^{\mathsf{C}})$ representa a probabilidade de A *não* acontecer. Assim:

Probabilidade do complementar: se A^{C} é o evento complementar a A, então

$$\Pr(A^{\mathsf{C}}) = 1 - \Pr(A).$$

O fato acima pode ser demonstrado formalmente da seguinte maneira: inicialmente, observe que $A \cap A^{\mathsf{C}} = \emptyset$, ou seja, A e A^{C} são mutualmente exclusivos. Portanto,

$$\Pr(A \cup A^{\mathsf{C}}) = \Pr(A) + \Pr(A^{\mathsf{C}}).$$

Por outro lado, $A\cup A^{\complement}=\Omega$, o evento certo. Assim, $\Pr(A\cup A^{\complement})=\Pr(\Omega)=1$, de sorte que

$$\Pr(A)+\Pr(A^{\complement})=1$$

ou, ainda, $\Pr(A^{\complement})=1-\Pr(A)$.

De forma semelhante ao que estudamos nas aulas sobre princípios básicos de contagem, em muitos problemas é mais fácil calcular a probabilidade de um evento não acontecer do que calcular diretamente a probabilidade de que ele aconteça. Vejamos um exemplo nesse sentido.

Exemplo 4. *De um grupo de* 10 *pessoas, formado por* 6 *homens e* 4 *mulheres, serão sorteadas* 5 *pessoas. Qual a probabilidade de se sortear pelo menos uma mulher.*

Solução. Seja A o evento "sortear pelo menos uma mulher". No lugar de tentar calcular a probabilidade de A diretamente, vamos calcular a probabilidade de seu complementar, $A^{\complement}$, que equivale a "não sortear mulher alguma". (Formalmente, nosso espaço amostral Ω é o conjunto de todos os subconjuntos de 5 pessoas escolhidas dentre as 10, e A é o subconjunto de Ω formado por aqueles conjuntos de 5 pessoas que possuem pelo menos uma mulher).

O total de maneiras (casos possíveis) de sortear as 5 pessoas dentre as 10 é $\binom{10}{5}$. O número de maneiras de escolher as 5 pessoas de forma que *não* haja mulher alguma é $\binom{6}{5}$ (já que as 5 pessoas teriam de ser escolhidas dentre os 6 homens). Logo $\Pr(A^{\complement})=\frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}}=\frac{1}{42}$. Daí, o que queremos é

$$\Pr(A)=1-\Pr(A^{\complement})=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}.$$

□

3 União de dois eventos quaisquer

No caso em que os eventos não são disjuntos, a probabilidade de sua união pode ser calculada usando o seguinte resultado.

Proposição 5. *Sejam A e B dois eventos quaisquer de um mesmo espaço amostral. Vale que*

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B).$$

Demonstação. A ideia é que, ao somarmos $\Pr(A)$ com $\Pr(B)$, estamos somando as probabilidades de todos os elementos de $A\cup B$, mas as probabilidades dos elementos de $A\cap B$ estão sendo somadas duas vezes (pois tais elementos estão tanto em A como em B); por isso, devemos subtrair $\Pr(A\cap B)$. Para obter um prova formal, iremos particionar $A\cup B$ e usar os fatos da seção anterior.

Veja que $A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$ e que os conjuntos $(A-B)$, $(A\cap B)$ e $(B-A)$ são dois a dois disjuntos (veja a Figura 1). Sendo assim, temos:

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A-B)+\Pr(A\cap B)+\Pr(B-A).$$

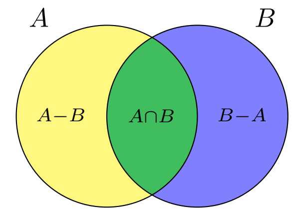

Figura 1: Interseção e diferenças entre conjuntos A e B.

Por outro lado, veja que podemos escrever:

$$A=(A-B)\cup(A\cap B),$$

com os conjuntos $A-B$ e $A\cap B$ também disjuntos. Logo,

$$\Pr(A)=\Pr(A-B)+\Pr(A\cap B) \tag{2}$$

e, de forma análoga,

$$\Pr(B)=\Pr(B-A)+\Pr(A\cap B). \tag{3}$$

Somando as relações (2) e (3), obtemos:

$$\begin{aligned}\Pr(A)+\Pr(B)=\Pr(A-B)&+\Pr(A\cap B)\\&+\Pr(B-A)+\Pr(A\cap B).\end{aligned}$$

Reordenando os termos da igualdade acima, temos que:

$$\begin{aligned}\Pr(A-B)+\Pr(A\cap B)&+\Pr(B-A)=\\&=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B).\end{aligned}$$

Por fim, como vimos no início, o lado esquerdo da expressão acima é igual a $\Pr(A\cup B)$. Logo

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B),$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 6. *Um dado honesto com seis faces (numeradas de* 1 *a* 6*) é lançado. Vejamos duas maneiras de calcular a probabilidade do evento "obter um número ímpar ou um primo".*

O espaço amostral é $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. O conjunto dos números ímpares de Ω é $A=\{1,3,5\}$, e o dos números primos é $B=\{2,3,5\}$. Os elementos de Ω que são ímpares e primos ao mesmo tempo são os elementos de $A\cap B=\{3,5\}$; por outro lado, os que são ímpares ou primos são os que estão em $A\cup B=\{1,2,3,5\}$.

Podemos calcular diretamente

$$\Pr(A\cup B)=\frac{|A\cup B|}{|\Omega|}=\frac{4}{6}.$$

Por outro lado, podemos ver também que $\Pr(A)=3/6$, $\Pr(B)=3/6$ *e* $\Pr(A\cap B)=2/6$. *Sendo assim, pela fórmula para a probabilidade da união, temos*

$$\begin{aligned}\Pr(A\cup B)&=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)\\&=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}.\end{aligned}$$

A maioria dos eventos cuja descrição envole o conectivo "OU" corresponde à união de dois eventos.

Exemplo 7. *Escolhendo-se ao acaso um número inteiro de* 26 *a* 175*, qual a probabilidade de ser escolhido um número que:*

(a) é múltiplo de 4*?*

(b) é múltiplo de 6*?*

(c) é múltiplo de 4 *e de* 6*?*

(d) é múltiplo de 4 *ou de* 6*?*

(e) não é múltiplo de 12*.*

Solução. Temos $\Omega = \{26, 27, \ldots, 175\}$, de sorte que $|\Omega| = 175 - 26 + 1 = 150$.

(a) O menor e o maior múltiplos de 4 em Ω são respectivamente $4 \cdot 7 = 28$ e $4 \cdot 43 = 172$. Logo, a quantidade múltiplos de 4 no intervalo dado é $43 - 7 + 1 = 37$. A probabilidade desejada é, portanto, igual a $37/150$.

(b) De forma análoga, há 25 múltiplos de 6 em Ω (o menor é $6 \cdot 5$ e o maior é $6 \cdot 29$). Logo, a probabilidade desejada é $25/150$.

(c) Todo inteiro que é múltiplo de 6 e de 4 é múltiplo de $\text{mmc}(4, 6) = 12$. Como nos itens anteriores, podemos verificar que a quantidade de múltiplos de 12 em Ω é igual a 12. Logo, a resposta é $12/150$.

(d) Podemos aplicar a Proposição 5, juntamente com o que calculamos nos itens anteriores, para obter a probabilidade desejada:

$$\frac{37}{150} + \frac{25}{150} - \frac{12}{150} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}.$$

(e) Como a probabilidade de se obter um múltiplo de 12 é igual a $\frac{12}{150}$, a probabilidade de não se obter isso é igual a

$$1 - \frac{12}{150} = \frac{138}{150}.$$

□

Observação 8. *A fórmula para o cálculo da probabilidade da união de três eventos quaisquer é dada por:*

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B \cup C) = &\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C)\\ &- \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C)\\ &+ \Pr(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Uma generalização disto para qualquer quantidade finita de eventos pode ser obtida através do chamado Princípio da Inclusão-Exclusão. Recomendamos a referência 1. da seção "Sugestões de Leitura Complementar" para o leitor que deseja aprender mais sobre isso.

Exemplo 9 (Paradoxo do Aniversário)**.** *Em um grupo de* 23 *pessoas escolhidas aleatoriamente, a probabilidade de que duas delas façam aniversário no mesmo dia é maior do que* 50%*. Se o grupo tiver* 57 *pessoas ou mais, tal probabilidade é maior do que* 99%*. Entretanto, a probabilidade só é igual a* 100% *se tivermos pelo menos* 367 *pessoas.*

Demonstração. Apesar de que o enunciado acima não é um paradoxo propriamente dito, ele é comumente chamado de paradoxo por ser contra-intuitivo. Para simplificar o cálculo, vamos considerar que o ano não é bissexto e que a as pessoas têm a mesma probabilidade de nascer em qualquer dia do ano (desconsiderando eventuais sazonalidades).

Assuma que temos um grupo de n pessoas. Se $n \leq 366$, então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia (Considerando que o ano pudesse ser bissexto, precisaríamos de 367 pessoas). Suponha, agora, que $n \leq 365$. Considere as sequências formadas pelos dias do ano do aniversário de cada uma das n pessoas (digamos, ordenadas de acordo com a ordem alfabética dos nomes das pessoas). O total de sequências é igual a 365^n. A quantidade delas em que todas fazer aniversário em dias distintos é igual a:

$$365 \cdot (365 - 1) \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365 - n)!}.$$

Logo, a probabilidade desejada é igual a

$$p_n = 1 - \frac{365!}{365^n (365 - n)!}.$$

É possível calcular esse valor facilmente para $n = 1$ ou $n = 2$, mas não há uma maneira elementar de calculá-lo valores grandes de n. Entretanto, com o auxílio de um computador é possível obter a seguinte tabela para os valores aproximados de p_n:

n	p_n
10	12,%
20	41%
23	50,7%
30	70%
50	97%
100	99,99996%
350	$(1 - 3 \cdot 10^{-131})100\%$
367	100%

□

4 O problema de Mére

Vejamos primeiro dois problemas mais simples.

Problema 10. *Um dado honesto com seis faces é lançado* 3 *vezes. Qual a probabilidade de se obter pelo menos um número igual a seis. E se jogarmos o dados* 6 *vezes?*

Solução. Se observarmos o resultado dos três lançamentos, temos um total de $6^3 = 216$ resultados possíveis. Vamos calcular a probabilidade do evento complementar ao que foi pedido. A quantidade de resultados dos três lançamentos em que o número seis não aparece nenhuma vez é igual a $5^3 = 125$. Sendo assim, a probabilidade de não obter um seis é igual a $\frac{125}{216} = 0{,}58$. Então, a probabilidade de obter pelo menos um seis é igual a $1 - 0{,}58 = 0{,}42$.

Com o mesmo argumento, se jogarmos o dado seis vezes, concluímos que a probabilidade de obter pelo menos um seis é igual a

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \frac{15625}{46656} \simeq 1 - 0{,}33 = 0{,}67.$$

□

É interessante observar que, ao lançarmos o dado uma única vez, a probabilidade do resultado ser igual a seis é $1/6$. Contudo, ao lançá-lo três vezes, a probabilidade de que o primeiro, o segundo ou o terceiro resultado seja igual a seis não é igual a $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}50$, pois estes três eventos não são disjuntos. Do mesmo modo, a probabilidade de obter ao menos um seis ao lançá-lo seis vezes ainda está longe de $6/6 = 100\%$. Mas vale o fato de que, quanto mais vezes lançarmos o dado, maior será a probabilidade de se obter ao menos um seis.

Problema 11. *Ao lançarmos um par de dados honestos, qual a probabilidade da soma dos valores obtidos ser igual a* 7.

Solução. Aqui, o nossa espaço amostral Ω é o conjunto de todos os pares *ordenados* (a, b) onde $a, b \in \{1, \dots, 6\}$. Assim $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$. Dentre esses, os pares $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ e $(6, 1)$ são aqueles em que a soma dos valores é igual a 7. Logo, há 6 casos favoráveis e a probabilidade desejada é igual a $6/36 = 1/6$. □

Observação 12. *No problema anterior, mesmo que os dados sejam idênticos devemos usar como espaço amostral um conjunto de pares ordenados, pois do contrário o espaço amostral não resultaria equiprovável. Por exemplo, o evento de obter os números* 1 *e* 2 *nos dados tem o dobro de chances de acontecer do que o evento de obter o número* 1 *em ambos os dados.*

Em 1654, Chevalier de Méré, um nobre Francês interessado em jogos de azar e apostas, chamou a atenção de Pascal e Fermat para o que ele achava ser uma contradição ao tentar resolver o problema seguinte.

Problema 13. *Ao lançar um par de dados* 24 *vezes, deve-se apostar se iremos obter simultaneamente o número seis em ambos os dados em ao menos uma das vezes. É mais provável que isso aconteça ou que não aconteça?*

A pergunta acima deu início a uma série de trocas de cartas entre Pascal e Fermat. Os cálculos de Mére indicavam que ele deveria apostar que o par seis não iria acontecer. Porém, na prática, ao jogar várias vezes, Mére constatou que era melhor apostar na ocorrência do par. A seguir, exibimos uma solução para esse problema.

Solução. Ao lançar o par de dados um única vez temos $6 \cdot 6 = 36$ possíveis resultados, dos quais apenas um é favorável. Ao lançar o par 24 vezes, se anotarmos a sequência de resultados, o número total de possíveis sequências é 36^{24}. O conjunto dessas sequências é nosso espaço amostral equiprovável. Queremos contar o número de sequências em que o par $(6, 6)$ aparece, mas é mais fácil contar o número de vezes em que ele não aparece. Neste caso, em cada um dos lançamentos temos 35 possibilidades ruins, o que nos dá um total de 35^{24} sequências em que o $(6, 6)$ não aparece.

Logo, a probabilidade não obter o par $(6, 6)$ é igual a $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Com o auxílio de uma calculadora científica, é possível checar que esse valor é aproximadamente 0,508, que é maior do que 50%. Portanto, há mais chances de não obter o par $(6, 6)$ do que de obtê-lo. □

5 Exercícios resolvidos

Nesta seção, colecionamos alguns problemas resolvidos, a fim de exercitar um pouco mais a teoria.

Problema 14 (UERJ). *Com o intuito de separar o lixo para reciclagem, uma instituição colocou em suas dependências cinco lixeiras de diferentes cores, de acordo com o tipo de resíduo a que se destina: vidro, plástico, papel, metal e lixo orgânico. Sem olhar para as lixeiras, João joga em uma delas uma garrafa plástica e em outra uma garrafa de vidro. A probabilidade de que ele tenha usado corretamente pelo menos uma lixeira é igual a:*

(a) 25%. | *(b)* 30%. | *(c)* 35%. | *(d)* 40%.

Solução 1. Como as garrafas foram lançadas em lixeiras distintas, o número total maneiras de lançá-las é $5 \cdot 4 = 20$. O evento 'usar corretamente pelo menos uma lixeira' pode acontecer de três maneiras (disjuntas).

(a) A garrafa de plástico cai na lixeira correta e a de vidro na errada: isso pode ocorrer de $1 \cdot 3 = 3$ modos.

(b) A garrafa de vidro cai na lixeira correta e a de plástico na errada: também há $1 \cdot 3 = 3$ modos disso ocorrer.

(c) Ambas as garrafas caem nas lixeiras corretas: há exatamente $1 \cdot 1 = 1$ modo disso ocorrer.

Logo, há $3 + 3 + 1 = 7$ casos favoráveis, de forma que a probabilidade pedida é igual a $7/20$. □

Solução 2. Considere o mesmo espaço de amostral da solução anterior, e sejam A o evento "colocar a garrafa de plástico na lixeira correta" e B o evento "colocar a garrafa de vidro na lixeira correta". Veja que $\Pr(A) = 1/5$ e $\Pr(B) = 1/5$. Também, como há apenas uma maneira colocar ambas as garrafas na lixeira correta, temos $\Pr(A \cap B) = 1/20$. Assim, a probabilidade desejada é igual a:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)\\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20}.\end{aligned}$$

□

Problema 15 (Enem, adaptada). *Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número, dentre dez possíveis. Opção 1: comprar três números para um único sorteio. Opção 2: comprar dois números para um dado sorteio e um número para outro sorteio. Opção 3: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios. Se X, Y e Z representam as probabilidades de o apostador ganhar pelo menos um prêmio escolhendo, respectivamente, a Opção 1, a Opção 2 e a Opção 3, é correto afirmar que:*

(a) $X < Y < Z$.

(b) $X = Y = Z$.

(c) $X > Y = Z$.

(d) $X = Y > Z$.

(e) $X > Y > Z$.

Solução. Claramente, temos que $X = \frac{3}{10} = 30\%$. Para calcularmos Y e Z, usamos o cálculo da probabilidade do evento complementar. Na Opção 2, serão realizados dois sorteios, num total de 100 resultados possíveis. Destes, $8 \cdot 9 = 72$ são ruins (esse é o total de casos correspondente a não ganharmos no primeiro nem no segundo sorteio). Logo $Y = 1 - \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} = 28\%$. De forma análoga (veja também a solução do Problema 13), temos que $Z = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 1 - \frac{729}{1000} = 27,1\%$.

Portanto, $X > Y > Z$, de sorte que a alternativa correta é o item (e). □

A solução do problema anterior nos mostra que, para ganharmos pelo menos um prêmio, é melhor concentramos as apostas em um único sorteio. Na verdade, isso não é uma surpresa: considere o caso em que o apostador pode escolher 10 números. Se ele escolher todos os números em um único sorteio, é garantido que irá ganhar. Por outro lado, se ele escolher um único número em dez sorteios distintos, pode acontecer que ele não ganhe. Entretanto, é importante observar que, concentrando as apostas, o apostador poderá ganhar no máximo um prêmio, enquanto apostando em jogos diferentes existe uma (pequena) chance de que ele ganhe mais de um prêmio.

Problema 16 (UERJ). *Um pessoa mistura as 28 peças de um dominó e retira a peça $(5, 3)$ do jogo. Em seguida, ela retira outra peça ao acaso, sem repor a primeira. Calcule a probabilidade da segunda peça possuir um 2 ou um 4.*

Solução. Após retirar a primeira peça, sobram 27 peças. Sendo assim, nosso espaço amostral contém 27 elementos. Dentre eles, há 7 peças que possuem o número 2 (lembre-se de que a primeira peça que foi removida não possui o 2). Logo, a probabilidade de que a segunda peça contenha o 2 é igual a $1/7$. Do mesmo modo, a probabilidade de que a segunda peça contenha o número 4 é igual a $1/7$. Por outro lado, pode acontecer de que a segunda peça sorteada contenha tanto o 2 como o 4. Isso acontece apenas se ela for a peça $(2, 4)$, logo, ocorre com probabilidade $1/27$.

Usando a expressão para a probabilidade da união, temos que a probabilidade desejada é igual a:

$$\frac{7}{27} + \frac{7}{27} - \frac{1}{27} = \frac{13}{27}.$$

□

Dicas para o Professor

Observe que, nas soluções dos problemas aqui expostos, evitamos usar o fato de que alguns dos eventos analisados são em independentes, já que esse assunto será abordado apenas na aula seguinte. Do mesmo modo, evitamos usar o conceito de probabilidade condicional. Assim, algumas vezes poderíamos ter simplificado o cálculo de certas probabilidades pedidas multiplicando outras tantas probabilidades mais simples. Entretanto, para tornar a exposição mais elementar (e condizente com o material das vídeo-aulas), preferimos sempre calcular o número de total de casos favoráveis (com o auxílio do princípio fundamental de contagem) e dividir pelo total de casos possíveis.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, P. Fernandez, A. C. de O. Morgado, J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, Rio de Janeiro, 2000.

2. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.