# Material Teórico - Módulo de Lei dos Senos e dos Cossenos

## Leis dos Senos e dos Cossenos

## Primeiro Ano do Ensino Médio

Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta segunda aula, estudaremos a *Lei dos Senos* e a *Lei dos Cossenos* para triângulos *quaisquer* (isto é, triângulos não necessariamente retângulos). Tais *leis* são dois conjuntos de *relações métricas* que, conforme veremos, funcionam, para triângulos quaisquer, como substitutos da Trigonometria em triângulos retângulos.

# 1 A Lei dos Senos I

Comecemos observando que, dado um triângulo $ABC$, sua **altura** *relativa* ao vértice $A$ é o segmento $AH_a$, tal que $H_a$ é um ponto sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$ para o qual $\overleftrightarrow{AH_a} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (figura 1). Nesse caso, dizemos que $H_a$ é o **pé da altura** relativa a $A$.

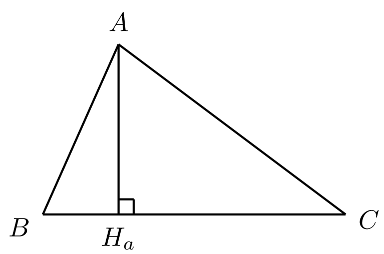


Figura 1: altura de um triângulo $ABC$, relativa a $A$.

Evidentemente, podemos definir, de maneira análoga, as alturas de $ABC$ relativas aos vértices $B$ e $C$. Assim, todo triângulo tem exatamente três alturas.

Se $ABC$ é um triângulo tal que $\widehat{B}, \widehat{C} < 90^\circ$ (como é o caso do triângulo da figura 1), então $H_a$ é um ponto sobre o lado $BC$ (para ver o que ocorre se $\widehat{A} > 90^\circ$, observe a figura 6).

Denotemos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AH_a} = h_a$, $\widehat{B} = \beta$ e $\widehat{C} = \gamma$ (figura 2). Segue da Trigonometria dos triângulos

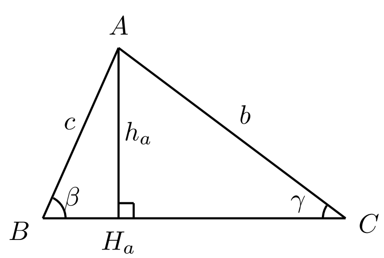


Figura 2: primeiro caso da Lei dos Senos.

retângulos $ACH_a$ e $ABH_a$ que

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{h_a}{b} \ \text{ e } \ \operatorname{sen}\beta = \frac{h_a}{c}.$$

Calculando o valor de $h_a$ em ambas as igualdades acima, obtemos

$$h_a = b \cdot \operatorname{sen}\gamma \ \text{ e } \ h_a = c \cdot \operatorname{sen}\beta,$$

de modo que

$$b \cdot \operatorname{sen}\gamma = c \cdot \operatorname{sen}\beta$$

ou, ainda,

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}. \qquad (1)$$

Vejamos uma aplicação interessante da igualdade acima.

**Exemplo 1.** *Na figura 3, os pontos $A$, $B$ e $C$ representam cidades de um país, e a porção acinzentada representa uma lagoa. Para encurtar o deslocamento entre as cidades $A$ e $C$, o governador da região do país em que ficam as cidades determinou que uma ponte fosse construída sobre a lagoa. No começo do planejamento da construção, os engenheiros do governo precisaram calcular a distância exata entre as cidades $A$ e $C$. Sabendo que a distância da cidade $A$ à cidade $B$ é igual a 8 quilômetros, e que os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do triângulo $ABC$ (medidos com o auxílio de um teodolito[1]), são respectivamente iguais a $60^\circ$ e $45^\circ$, explique como os engenheiros puderam calcular a distância entre as cidades $A$ e $C$.*

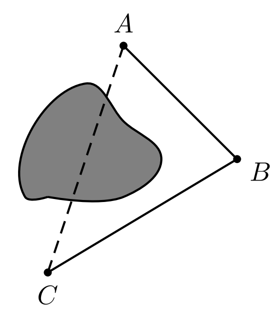


Figura 3: medindo distâncias com obstáculos.

**Solução.** Eles utilizaram a relação (1), com $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c = 8$, $\widehat{B} = \beta = 60^\circ$ e $\widehat{C} = \gamma = 45^\circ$. Com tais valores, (1) fornece a igualdade

$$\frac{b}{\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen}45^\circ},$$

de maneira que

$$b = \frac{8\operatorname{sen}60^\circ}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{6} \cong 9,79.$$

Portanto, a distância entre as cidades $A$ e $C$ é de aproximadamente $9,79$km. $\square$

Se o triângulo $ABC$ for **acutângulo**, isto é, se $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} < 90^\circ$, então os pés $H_b$ e $H_c$, das alturas respectivamente relativas aos vértices $B$ e $C$, também estão sobre os lados $AC$ e $AB$ (também respectivamente). Na figura 4, traçamos a

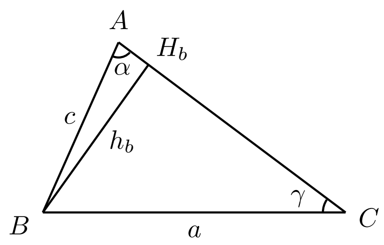


Figura 4: altura relativa a $B$, para $ABC$ acutângulo.

altura relativa a $B$, de forma que $H_b \in AC$. Calculando os senos de $\alpha$ e $\gamma$ nos triângulos retângulos $ABH_b$ e $CBH_b$, obtemos

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{h_b}{c}$$

e, daí, $h_b = a \cdot \operatorname{sen}\gamma$ e $h_b = c \cdot \operatorname{sen}\alpha$. Portanto,

$$a \cdot \operatorname{sen}\gamma = c \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

ou, ainda,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}. \tag{2}$$

Então, combinando as relações (1) e (2), obtemos a **Lei dos Senos** para triângulos acutângulos: se $ABC$ é um triângulo acutângulo com lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e ângulos $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$, então

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}, \tag{3}$$

Suponhamos, agora, que $ABC$ é um triângulo retângulo em $B$, conforme mostra a figura 5. Como $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{b}$ e

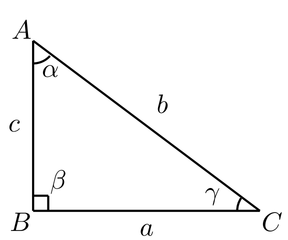


Figura 5: Lei dos Senos em triângulos retângulos.

$\operatorname{sen}\gamma = \frac{c}{b}$, temos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{a/b} = b \quad \text{e} \quad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{c}{c/b} = b.$$

Então,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = b$$

e, como $\beta = 90°$, se quisermos que (3) continue a valer para triângulos retângulos, devemos *definir* o seno de 90° (observe que não fizemos isso na aula passada) de tal forma que $\frac{b}{\operatorname{sen}90°} = b$.

Em resumo, definindo

$$\operatorname{sen}90° = 1, \tag{4}$$

concluímos que (3) continua verdadeira para triângulos retângulos.

Vejamos, agora, o que ocorre se $ABC$ tiver ângulos maiores que 90°. Para tanto, recorde que a soma dos ângulos internos de todo triângulo é igual a 180°:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°.$$

Portanto, no máximo um dentre $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ pode ser maior que 90°.

Suponhamos (figura 6) que $\widehat{A} = \alpha > 90°$ (os casos em que $\widehat{B} > 90°$ ou $\widehat{C} > 90°$ podem ser analisados de forma completamente análoga). Então, fazendo $\widehat{B} = \beta$ e $\widehat{C} = \gamma$, temos $\beta, \gamma < 90°$ e, de acordo com (1),

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}. \tag{5}$$

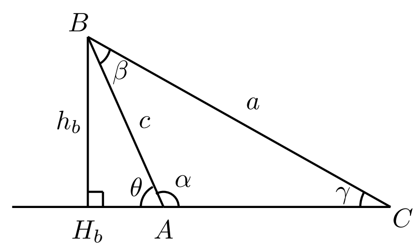


Figura 6: altura relativa a um angulo obtuso.

Agora, como $\alpha > 90°$, o ponto $H_b$, pé da altura relativa a $B$, é tal que $A \in H_bC$. Se $B\widehat{A}H_b = \theta$, então $\theta = 180° - \alpha < 90°$. Denotando $\overline{BH_b} = h_b$, a Trigonometria dos triângulos retângulos $BCH_b$ e $BAH_b$ fornece as igualdades

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{h_b}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{h_b}{c}.$$

Resolvendo ambas as igualdades acima para $h_b$, obtemos

$$h_b = a \cdot \operatorname{sen}\gamma \quad \text{e} \quad h_b = c \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Portanto,

$$a \cdot \operatorname{sen}\gamma = c \cdot \operatorname{sen}\theta$$

ou, ainda,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Combinando essa última igualdade com (5), obtemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

[1]Um teodolito é um instrumento utilizado em construção civil, que permite calcular com precisão o ângulo entre dois pontos de referência, medido a partir de um ponto fixado.

Então, se quisermos manter a validade de (3) também nesse caso, devemos *definir* o seno de $\alpha$ (observe que, na aula passada, também não definimos o seno de ângulos obtusos) de tal forma que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\theta$.

Em resumo, lembrando que $\theta = 180° - \alpha < 90°$, e definindo

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha), \tag{6}$$

chegamos à seguinte formulação geral da **Lei dos Senos**: se $ABC$ é um triângulo com lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e ângulos $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$, então

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}. \tag{7}$$

Antes de apresentarmos algumas aplicações da Lei dos Senos, colecionemos uma consequência útil das definições (4) e (6).

Em (6), fazendo $180° - \alpha$ respectivamente igual a $60°$, $45°$ e $30°$, e levando em conta os valores de $\operatorname{sen}30°$, $\operatorname{sen}45°$ e $\operatorname{sen}60°$, calculados na Aula 1, obtemos a tabela abaixo:

| $\alpha$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen}\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |

No exemplo a seguir, utilizamos a lei dos senos para deduzir o *Teorema da Bissetriz Interna* de uma maneira completamente diferente daquela da segunda aula do Módulo *Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales*, do nono ano.

**Exemplo 2.** *Nas notações da figura 7, seja $P$ o* pé *da* bissetriz interna *de $ABC$ relativa ao vértice $A$, isto é, o ponto sobre o lado $BC$ tal que $B\widehat{A}P = C\widehat{A}P$.*

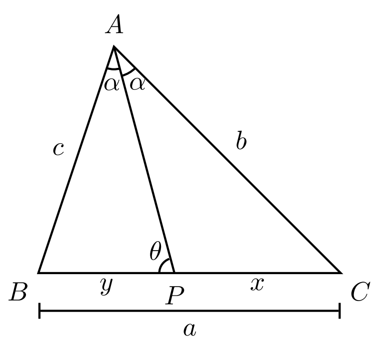

Figura 7: revisitando o Teorema da Bissetriz Interna.

*Se $A\widehat{P}B = \theta$, então $A\widehat{P}C = 180° - \theta$. Faça $B\widehat{A}P = C\widehat{A}P = \alpha$, $\overline{BP} = y$ e $\overline{CP} = x$. Aplicando a Lei dos Senos aos triângulos $ABP$ e $ACP$, obtemos*

$$\frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta} \quad e \quad \frac{x}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}(180° - \theta)}.$$

*Da primeira igualdade acima, obtemos*

$$\frac{y}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta};$$

*da segunda, obtemos*

$$\frac{x}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(180° - \theta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}.$$

*Portanto,*

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Reobtemos, assim, o **Teorema da Bissetriz Interna**:

> Em um triângulo $ABC$, seja $P$ o pé da bissetriz interna de $ABC$ relativa ao vértice $A$. Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BP} = y$ e $\overline{CP} = x$, então
>
> $$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

## 2 A Lei dos Senos II

Nesta seção, refinamos o estudo da seção anterior, sobre a Lei dos Senos. Antes, contudo, precisamos discutir alguns fatos preliminares sobre triângulos e ângulos no círculo.

Dado um círculo $\Gamma$ (lê-se *Gama*) de centro $O$ (figura 8), um **ângulo central** em $\Gamma$ é um ângulo de vértice $O$ e que

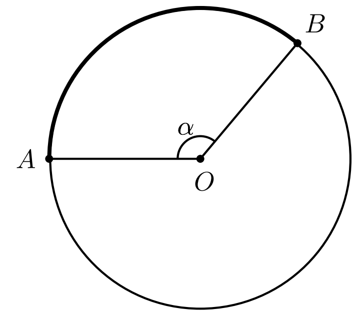

Figura 8: cordas de ângulos centrais iguais.

tem dois raios do círculo por seus lados. Nas notações da figura 8, $\angle AOB$ é um ângulo central e o arco $\overset{\frown}{AB}$ em negrito é o arco subentendido pelo ângulo central $AOB$. Denotando por $A\widehat{O}B$ a medida do ângulo central $\angle AOB$, temos por definição que

$$A\widehat{O}B = m(\overset{\frown}{AB}),$$

a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ subentendido. Assim, se $A\widehat{O}B = \alpha$, então é porque $m(\overset{\frown}{AB}) = \alpha$ também.

Se $AB$ e $AC$ são cordas de um círculo $\Gamma$ de centro $O$ (figura 9), dizemos que $\angle BAC$ é um **ângulo inscrito** em $\Gamma$. Nesse caso, dizemos ainda que $\angle BOC$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\angle ABC$.

Mais adiante nesta seção, precisaremos do seguinte fato importante sobre ângulos inscritos, conhecido como o **Teorema do Ângulo Inscrito**:

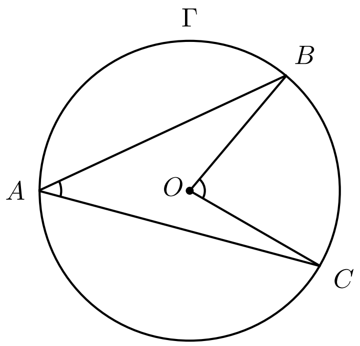


Figura 9: ângulo inscrito e ângulo central correspondente.

> Se $\angle BAC$ é um ângulo inscrito em um círculo de centro $O$, então a medida de $\angle ABC$ é igual à metade da medida do ângulo central correspondente $\angle BOC$. Em símbolos,
>
> $$B\widehat{A}C = \frac{1}{2}B\widehat{O}C. \qquad (8)$$

Justifiquemos a propriedade acima no caso em que o ângulo $\angle BAC$ contém o centro $O$ em seu interior (figura 9 – os casos em que o ângulo $\angle BAC$ não contém o centro $O$ ou em que o centro $O$ está sobre um dos lados de $\angle BAC$ podem ser tratados de forma muito semelhante).

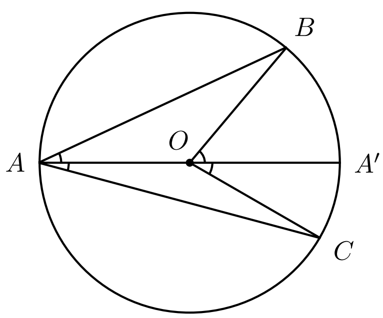


Figura 10: ângulo inscrito quando o centro pertence ao mesmo.

Como $\overline{AO} = \overline{BO}$ e $\overline{AO} = \overline{CO}$, concluímos que os triângulos $OAB$ e $OAC$ são isósceles, de bases respectivamente iguais a $AB$ e $AC$; portanto, temos $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A$ e $O\widehat{A}C = O\widehat{C}A$.

Denotando $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = \alpha$ e $O\widehat{A}C = O\widehat{C}A = \beta$, temos

$$B\widehat{A}C = O\widehat{A}B + O\widehat{A}C = \alpha + \beta.$$

Por outro lado, segue do Teorema do Ângulo Externo que

$$B\widehat{O}A' = O\widehat{A}B + O\widehat{B}A = 2\alpha$$

e

$$C\widehat{O}A' = O\widehat{A}C + O\widehat{C}A = 2\beta.$$

Daí,

$$\begin{aligned} B\widehat{O}C &= B\widehat{O}A' + C\widehat{O}A' = 2\alpha + 2\beta \\ &= 2(\alpha + \beta) = 2B\widehat{A}C. \end{aligned}$$

Isso justifica a igualdade (8).

Voltemo-nos, agora, à discussão de outro tema.

Dados pontos distintos $A$ e $B$, definimos a **mediatriz** do segmento $AB$ como a reta $r$, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto médio de $AB$ (figura 11).

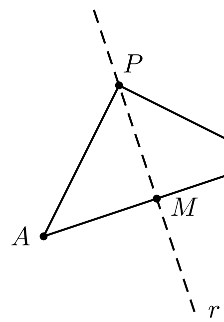


Figura 11: $P \in r \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.

A importância da mediatriz do segmento $AB$ se deve a que, para todo ponto $P \in r$, temos

$$\overline{AP} = \overline{BP}. \qquad (9)$$

De fato, sendo $M$ o ponto médio de $AB$, os triângulos $PAM$ e $PBM$ são tais que

$$PM \text{ é comum}, \quad P\widehat{M}A = P\widehat{M}B = 90°, \quad \overline{AM} = \overline{BM}.$$

Portanto, os triângulos $PAM$ e $PBM$ são congruentes, pelo caso de congruência de triângulos LAL. Logo, a relação (9) é válida.

A propriedade da mediatriz de um segmento discutida acima tem a seguinte consequência importante:

> Para todo triângulo, existe um círculo passando por seus vértices. Tal círculo é o círculo **circunscrito** ao triângulo e seu centro é o **circuncentro** do triângulo.

Realmente (figura 12), dado um triângulo $ABC$, se $r$ e $s$ são as mediatrizes dos lados $AB$ e $BC$, então $r$ e $s$ não são paralelas (pois $r \perp AB$ e $s \perp BC$); por outro lado, sendo $r \cap s = \{O\}$, segue de (9) que

$$O \in r \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB} \;\text{ e }\; O \in s \Rightarrow \overline{OB} = \overline{OC}.$$

Portanto,

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

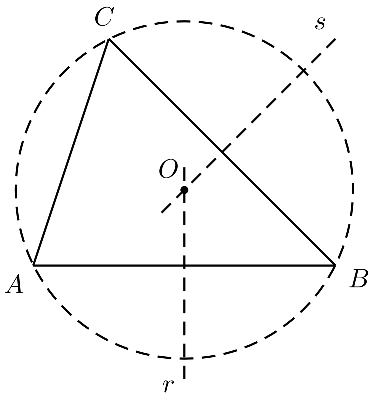


Figura 12: circuncentro e círculo circunscrito a um triângulo.

e, denotando por $R$ essa distância comum, concluímos que o círculo de centro $O$ e raio $R$ passa por $A$, $B$ e $C$.

Estamos finalmente em condições de enunciar a versão mais geral possível da Lei dos Senos.

**Proposição 3** (Lei dos senos). *Seja $ABC$ um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e ângulos $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$ e $\widehat{C} = \gamma$. Se $R$ é o raio do círculo circunscrito a $ABC$, então*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R. \tag{10}$$

A seguir, justificaremos a validade das relações (10), o que implicará, em particular, que reobteremos as igualdades (7). Entretanto, agora nosso argumento será completamente diferente do que utilizamos anteriormente. Por simplicidade, consideraremos somente o caso em que $ABC$ é um triângulo acutângulo (a análise dos demais casos – nos quais $ABC$ é retângulo ou obtusângulo – é totalmente análoga).

**Prova.** É suficiente provar que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}, \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{2R} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{c}{2R}.$$

Provemos a primeira igualdade acima, sendo a prova das outras duas completamente análoga.

Nas notações da figura 13, seja $O$ o centro do círculo $\Gamma$, circunscrito a $ABC$. Se $A'$ é a outra extremidade do diâmetro de $\Gamma$ que passa por $B$, então o Teorema do Ângulo Inscrito garante que

$$B\widehat{A'}C = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC}) \quad \text{e} \quad B\widehat{A}C = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC}).$$

Portanto, denotando a medida do arco $\overset{\frown}{BC}$ em negrito por $2\alpha$, concluímos que

$$B\widehat{A'}C = B\widehat{A}C = \alpha.$$

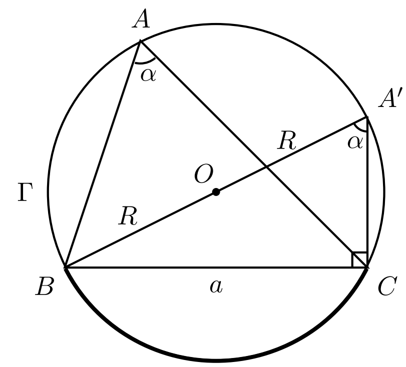


Figura 13: a Lei dos Senos.

Por outro lado, como $BA'$ é diâmetro de $\Gamma$, temos $A'\widehat{C}B = 90°$. Então, no triângulo retângulo $BA'C$, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} B\widehat{A'}C = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{a}{2R}.$$

□

Conforme mostrado no exemplo a seguir, a versão geral da Lei dos Senos fornece uma maneira simples de calcular o raio do círculo circunscrito a um triângulo, contanto que conheçamos as medidas de um lado do triângulo e do seno do ângulo oposto a esse lado.

**Exemplo 4.** *Sejam $ABC$ um triângulo equilátero cujos lados têm comprimento $\ell$, e $R$ o raio de seu círculo circunscrito. Como $\widehat{A} = 60°$, segue da Lei dos Senos que*

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{\ell}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{2\ell}{\sqrt{3}}.$$

*Portanto, $R = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$.*

**Exemplo 5.** *Em um triângulo acutângulo $ABC$, o raio de seu círculo circunscrito é igual ao comprimento do lado $BC$. Calcule os possíveis valores do ângulo $\widehat{A}$.*

**Solução.** Denotando $\overline{BC} = a$, temos $R = a$. Denotando $\widehat{A} = \alpha$, segue da Lei dos Senos que $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R = 2a$. Portanto,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} 30°$$

e, como $\alpha < 90°$, temos $\alpha = 30°$. □

## 3 A Lei dos Cossenos

Sejam $ABC$ um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e $H_b$ o pé da altura relativa ao lado $AC$, com $\overline{BH_b} = h_b$.

Se $\widehat{A} < 90°$ e $\widehat{C} < 90°$ (figura 14), então o ponto $H_b$ está

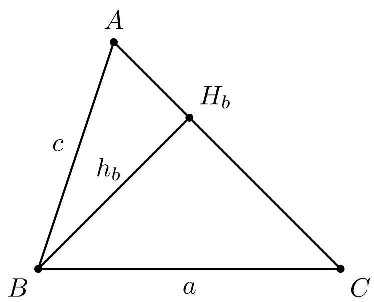


Figura 14: a Lei dos Cossenos.

sobre o lado $AC$. Calculando o cosseno e o seno do ângulo $\widehat{A}$ no triângulo retângulo $BAH_b$, obtemos

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{h_b}{c} \quad \text{e} \quad \cos\widehat{A} = \frac{\overline{AH_b}}{c},$$

de maneira que

$$h_b = c \operatorname{sen}\widehat{A} \quad \text{e} \quad \overline{AH_b} = c\cos\widehat{A}. \qquad (11)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $BCH_b$, segue que

$$\begin{aligned} a^2 &= h_b^2 + \overline{CH_b}^2 = h^2 + (b - \overline{AH_b})^2 \\ &= (c\operatorname{sen}\widehat{A})^2 + (b - c\cos\widehat{A})^2 \\ &= b^2 + c^2((\operatorname{sen}\widehat{A})^2 + (\cos\widehat{A})^2) - 2bc\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

Agora, segue da relação fundamental da trigonometria (veja a Aula 1 deste módulo) que

$$(\operatorname{sen}\widehat{A})^2 + (\cos\widehat{A})^2 = 1.$$

Então, substituindo essa igualdade nos cálculos acima, obtemos a relação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \qquad (12)$$

conhecida como a **Lei dos Cossenos**.

Observe que, se $ABC$ for acutângulo, então argumentos análogos aos que utilizamos acima nos dão mais as outras igualdades abaixo, também conhecidas como a Lei dos Cossenos:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \end{aligned}\ .$$

Se $\widehat{A} = 90^\circ$ (figura 15), o Teorema de Pitágoras garante que $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto, a única maneira de (12) continuar verdadeira nesse caso é *definindo*

$$\cos 90^\circ = 0. \qquad (13)$$

Suponha, por fim, que $\widehat{A} > 90^\circ$. Nesse caso (figura 16), o

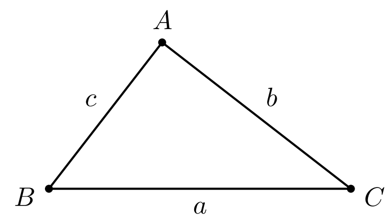


Figura 15: a lei dos Cossenos para ângulos retos.

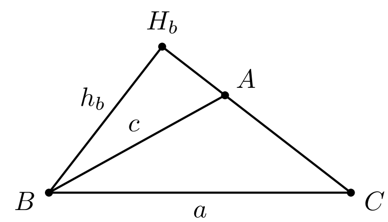


Figura 16: a Lei dos Cossenos para ângulos obtusos.

vértice $A$ pertence ao segmento $CH_b$. Por simplicidade de notação, faça $B\widehat{A}H_b = \theta$, de modo que $\theta = 180^\circ - \widehat{A} < 90^\circ$. Então, calculando o cosseno e o seno de $\theta$ no triângulo retângulo $BAH_b$, como em (11), obtemos

$$h_b = c\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad \overline{AH_b} = c\cos\theta.$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo $BCH_b$ e prosseguindo como fizemos no caso $\widehat{A} < 90^\circ$, $\widehat{C} < 90^\circ$, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} a^2 &= h_b^2 + \overline{CH_b}^2 = h_b^2 + (b + \overline{AH_b})^2 \\ &= (c\operatorname{sen}\theta)^2 + (b + c\cos\theta)^2 \\ &= b^2 + c^2((\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2) + 2bc\cos\theta. \end{aligned}$$

Por fim, invocando novamente a relação fundamental da Trigonometria, temos $(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ e, daí,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

Então, se quisermos que (12) continue válida também nesse caso, temos de *definir* $\cos\widehat{A} = -\cos\theta$, quer dizer, temos de definir que, para $90^\circ < \widehat{A} < 180^\circ$, tenhamos

$$\cos\widehat{A} = -\cos(180^\circ - \widehat{A}). \qquad (14)$$

Definindo $\cos 90^\circ = 0$ e o cosseno de ângulos obtusos como em (14), segue que a relação (12) é válida para todos os valores de $\widehat{A}$. Obtemos, assim, a versão geral da **Lei dos Cossenos**.

**Proposição 6** (Lei dos Cossenos). *Se $ABC$ é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \end{aligned}\ . \qquad (15)$$

Em (14), fazendo $180° - \widehat{A}$ respectivamente igual a $60°$, $45°$ e $30°$, e levando em conta os valores de $\cos 30°$, $\cos 45°$ e $\cos 60°$, calculados na Aula 1, obtemos a tabela abaixo, complementar àquela obtida anteriormente para os senos do um ângulo reto e de ângulos obtusos notáveis:

| $\widehat{A}$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\cos\widehat{A}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

A seguir, vejamos alguns exemplos de aplicação da Lei dos Cossenos.

**Exemplo 7.** *Na figura 17, $ABCD$ é um quadrado e $CDE$ é um triângulo equilátero. A esse respeito, faça os seguintes itens:*

*(a) Sendo $\ell = \overline{AB}$, calcule, em função de $\ell$, o comprimento do segmento $AE$.*

*(b) Use o resultado do item (a) para calcular* $\operatorname{sen} 15°$.

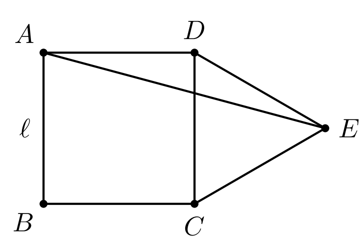


Figura 17: justapondo quadrado e triângulo equilátero.

**Solução.**
(a) Como $A\widehat{D}C = 90°$ e $C\widehat{D}E = 60°$, temos

$$A\widehat{D}E = A\widehat{D}C + C\widehat{D}E = 90° + 60° = 150°.$$

Por outro lado, como os lados de um quadrado e de um triângulo equilátero são todos iguais, temos $\overline{AD} = \overline{AB} = \ell$ e $\overline{DE} = \overline{CD} = \overline{AB} = \ell$.

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo $ADE$, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{AE}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - 2\,\overline{AD}\cdot\overline{DE}\cos 150° \\ &= \ell^2 + \ell^2 - 2\ell\cdot\ell\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\ell^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ell^2(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{AE} = \ell\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

(b) Nas notações da figura 17, como $\overline{AD} = \overline{DE}$, concluímos que o triângulo $ADE$ é isósceles de base $AE$, de forma que $D\widehat{A}E = D\widehat{E}A$. Mas, como $A\widehat{D}E = 150°$, obtemos

$$D\widehat{A}E + D\widehat{E}A = 180° - A\widehat{D}E = 30°.$$

Portanto,

$$D\widehat{A}E = D\widehat{E}A = 15°.$$

Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo $ADE$, e utilizando o valor de $\overline{DE}$ calculado no item (a), obtemos

$$\frac{\overline{DE}}{\operatorname{sen} D\widehat{A}E} = \frac{\overline{AE}}{\operatorname{sen} A\widehat{D}E}$$

ou, ainda,

$$\frac{\ell}{\operatorname{sen} 15°} = \frac{\ell\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\operatorname{sen} 150°}.$$

Substituindo $\operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2}$ e resolvendo a igualdade anterior para $\operatorname{sen} 15°$, obtemos

$$\operatorname{sen} 15° = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

(Verifique que tal valor coincide com aquele calculado no Exemplo 10 da Aula 1.) □

**Exemplo 8.** *Em um triângulo $ABC$, temos $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{BC} = 3$. Marcamos um ponto $P$ sobre o lado $BC$, tal que $\overline{BP} = 1$ e $\overline{CP} = 2$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{AP}$.*

**Prova.** Nas notações da figura 18, sejam $\overline{AP} = x$ e $A\widehat{P}C = \theta$, de forma que $A\widehat{P}B = 180° - \theta$.

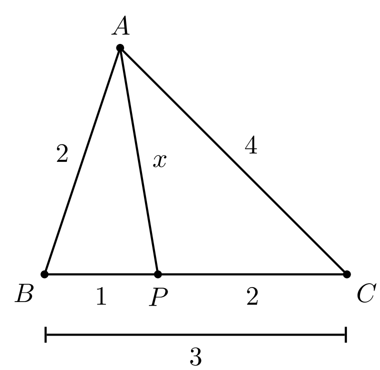


Figura 18: calculando o comprimento $\overline{AP}$.

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo $APC$ para calcular $\overline{AC} = 4$, obtemos

$$4^2 = x^2 + 2^2 - 2\cdot 2x\cos\theta$$

e, daí,

$$\cos\theta = \frac{x^2-12}{4x}.$$

Por outro lado, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo $APB$ para calcular $\overline{AB} = 2$, e usando que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, obtemos

$$\begin{aligned} 2^2 &= x^2 + 1^2 - 2x\cos(180° - \theta) \\ &= x^2 + 1 + 2x\cos\theta, \end{aligned}$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{3 - x^2}{2x}.$$

Igualando as duas expressões para $\cos\theta$ obtidas acima, e cancelando o fator $x$ que aparece no denominador delas duas, segue que

$$\frac{x^2 - 12}{4} = \frac{3 - x^2}{2}.$$

Resolvendo a equação acima, chegamos facilmente a $x = \sqrt{6}$. □

**Exemplo 9.** *Os três mosqueteiros, Athos, Porthos e Aramis, discutiram certo dia numa taverna. Imediatamente após a discussão, cada um deles seguiu seu caminho, cavalgando em linha reta, em direções que formavam* $120°$ *uma com a outra. Sabendo que suas velocidades eram* $10km/h$, $20km/h$ *e* $40km/h$, *respectivamente, mostre que, exatamente uma hora após a discussão, as posições dos três mosqueteiros formavam os vértices de um triângulo retângulo, com o ângulo reto na posição ocupada por Athos.*

**Solução.** Considere a figura 19 como representativa da situação, onde $T$ denota a localização da taverna e $A$, $B$ e $C$ as posições de Athos, Porthos e Aramis uma hora após eles terem deixado a taverna.

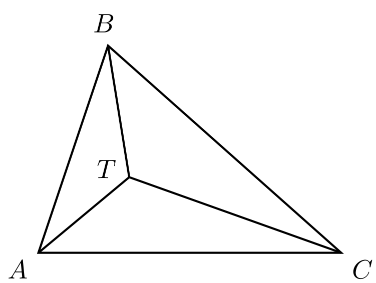


Figura 19: as trajetórias dos mosqueteiros.

Como as velocidades dos mosqueteiros eram constantes, temos que $\overline{AT} = 10\text{km}$, $\overline{BT} = 20\text{km}$ e $\overline{CT} = 40\text{km}$. Agora, aplicando a Lei dos Cossenos a cada um dos triângulos $ABT$, $ACT$ e $BCT$, obtemos respectivamente

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 - 2\,\overline{AT}\cdot\overline{BT}\cos 120° \\ &= 10^2 + 20^2 - 2\cdot 10\cdot 20\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 500 + 200 = 700, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AT}^2 + \overline{CT}^2 - 2\,\overline{AT}\cdot\overline{CT}\cos 120° \\ &= 10^2 + 40^2 - 2\cdot 10\cdot 40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1700 + 400 = 2100 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{BT}^2 + \overline{CT}^2 - 2\,\overline{BT}\cdot\overline{CT}\cos 120° \\ &= 20^2 + 40^2 - 2\cdot 20\cdot 40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2000 + 800 = 2800. \end{aligned}$$

Então, no triângulo $ABC$, temos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2,$$

de forma que esse triângulo é retângulo em $A$, que é a posição de Athos. □

Gostaríamos de terminar essa aula observando um ponto muito importante: as extensões dos conceitos de seno e cosseno a ângulos retos e obtusos *preservam* a relação fundamental da Trigonometria, vista na Aula 1 para ângulos agudos:

| |
|---|
| Para $0° < \theta < 180°$, temos $$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$ |

Realmente, para $0° < \theta < 90°$, a relação fundamental da Trigonometria foi vista na Aula 1. Para $\theta = 90°$, temos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1^2 + 0^2 = 1.$$

Por fim, para $90° < \theta < 180°$ e pondo $\alpha = 180° - \theta$, temos $0° < \alpha < 90°$, de modo que

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = (\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

## Dicas para o Professor

Cada uma das três seções deste material merece pelo menos duas, mas idealmente três, sessões de 50min para ser discutida adequadamente. Um ponto muito importante, que atravessa as três seções e que você deve enfatizar, é o fato de como as leis dos senos e dos cossenos permitem estender o conceito de seno e cosseno para ângulos retos e obtusos. Alerte também os alunos para o fato de que a relação fundamental da trigonometria continua válida para tais extensões do seno e do cosseno. Esses fatos formarão uma base para o aluno, sobre a qual construiremos, em aulas futuras, a teoria geral de Trigonometria.

Outro ponto muito importante é que você deve apresentar cuidadosamente todos os argumentos das propriedades discutidas ao longo do texto. Por um lado, o aluno deve perceber que Matemática não é uma matéria *decorativa*, mas sim *dedutiva*; por outro, em que pese o fato de que o texto discute o porquê da validade das propriedades, a experiência mostra que, após uma explanação inicial por parte do professor, o aluno terá muito mais facilidade em, relendo o material em casa, apreender os detalhes e o quadro geral da teoria que foi exposta em sala.

Observe que a referência [2] contém vários exemplos mais simples de aplicação das leis dos senos e dos cossenos, os quais você pode explorar. Novamente, a referência [1] contém exemplos e problemas mais avançados, os quais podem instigar os alunos que apresentarem maior facilidade com o conteúdo deste material.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.