Material Teórico - Módulo Binômio de Newton e Triangulo de Pascal

Binômio de Newton e Triangulo de Pascal

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Introdução

Neste material teórico damos o início ao estudo do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal. Estes dois assuntos estão intimamente relacionados e mesclam argumentos puramente algébricos com argumentos combinatórios. Ao longo do texto, n denota um número inteiro não negativo.

2 Binômio de Newton

O Binômio de Newton nos fornece uma maneira rápida de expandir expressões do tipo $(x+y)^n$ como uma soma de monômios, ou seja, uma soma onde cada parcela é um produto de um certo coeficiente por potências de x e de y.

Nos casos em que $n = 0$ e $n = 1$ tais expansões são triviais. Para obtê-las quando $n = 2$ ou $n = 3$, basta lembrarmos que elas se resumem a dois importantes produtos notáveis. Assim, temos que:

Para quaisquer números reais x e y, valem:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^0 = 1,\\
&(x+y)^1 = x+y,\\
&(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,\\
&(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.
\end{aligned}$$

Lembre-se de que as expressões acima podem ser obtidas diretamente, utilizando-se as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Isso foi feito em detalhes no material teórico do módulo sobre produtos notáveis.

Queremos, agora, obter fórmulas semelhantes para valores maiores de n. O caso em que $n = 4$, assim como os anteriores, ainda pode ser resolvido apenas "fazendo-se a conta". Vejamos: como $(x+y)^4 = (x+y)^3(x+y)$, basta tomar a expressão que tínhamos para $(x+y)^3$ e multiplicá-la por $(x+y)$. Deixamos como exercício para o leitor verificar que o resultado disso é:

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4. \quad (1)$$

Observe que, em todos os casos acima, conseguimos organizar as parcelas de modo que, ao percorrê-las da esquerda para a direita, o expoente de x começa igual a n e, à medida que avançamos, ele *decresce* em exatamente uma unidade, parcela a parcela (veja que na última parcela, podemos imaginar que o expoente de x é igual a zero, uma vez que $x^0 = 1$). O expoente de y, por sua vez, *aumenta* em uma unidade cada vez que passamos para a parcela seguinte.

Apesar dessa não ser a única maneira pela qual podemos organizar tais parcelas, ela é uma maneira bastante elegante e conveniente (sempre que viável). Agora, para obtermos uma expressão geral para $(x+y)^n$, onde n é um inteiro positivo qualquer, precisamos apenas dos seguintes ingredientes:

(a) Argumentar que a parte literal de todos os monômios da expansão é da forma x^iy^j onde $i+j = n$, ou seja, da forma $x^{n-j}y^j$.

(b) Encontrar uma maneira simples de calcular o coeficiente do monômio $x^{n-j}y^j$ em tal expressão.

Faremos (a) e (b) de forma simultânea com um simples argumento combinatório. Antes disso, vamos analisar novamente o caso em que $n = 3$ de um novo ponto de vista. Observe que, de forma mais geral, ao desenvolvermos um produto onde cada fator é uma soma de literais, por exemplo, algo da forma $(a+b+c)(d+e)(f+g+h+i)$, o resultado final é uma soma de monômios, onde cada monômio pode ser obtido escolhendo-se um literal de cada um dos fatores originais (ou seja, escolhendo-se um literal de cada uma dos "parênteses"). Por exemplo, ao desenvolvermos $(a+u)(b+v)(c+w)$ o resultado é

$$abc+abw+avc+avw+ubc+ubw+uvc+uvw.$$

Veja, por exemplo, que o termo avw foi obtido escolhendo-se o literal a do binômio $a+u$, o literal v de $b+v$ e o literal w de $c+w$. Da mesma forma, $(x+y)^3$ também pode ser expressado como:

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\
&= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy\\
&= x^3+x^2y+x^2y+xy^2+x^2y+xy^2+xy^2+y^3.
\end{aligned}$$

A partir daí, basta agrupar os monômios que são iguais para obter o produto notável usual. Veja, por exemplo, que x^2y terá coeficiente 3, pois o monômio x^2y aparece três vezes na expressão acima. Para resolver o caso geral, basta observar que

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y),$$

onde o produto possui n fatores. Ou seja, $(x+y)^n$ é um produto de n binômios, cada um deles igual a $x+y$. Pelo argumento anterior, cada monômio resultante do desenvolvimento de $(x+y)^n$ é um produto formado por n literais, onde cada literal é igual a x ou y. Veja que cada monômio corresponde a (exatamente) uma sequência de n termos, onde cada termo é igual a x ou y. Note, então, que cada monômio é da forma x^iy^j onde i é o número de vezes em que o literal x aparece em tal sequência e j é o número de vezes em que y aparece. Claramente, $i+j$ é igual ao número de termos na sequência, que é n. Assim, $i+j = n$, o que implica $i = n-j$, de forma que cada monômio é da forma $x^{n-j}y^j$. Portanto o item (a) está provado. Quanto a (b), note que o coeficiente do monômio $x^{n-j}y^j$ corresponde à quantidade de sequências (de n termos, onde cada termo é igual a x ou y) nas quais y aparece exatamente j vezes. Conforme estudamos anteriormente, isso é exatamente o número de maneiras de escolher j dos n parênteses, i.e. é igual ao número de combinações de n escolhe j, que é igual a $\binom{n}{j}$.

O resultado dessa discussão pode ser resumido pela identidade a seguir:

Desenvolvimento do Binômio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots \\ \cdots + \binom{n}{j}x^{n-j}y^j + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

A expressão

$$\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

é chamada de **termo geral** do binômio de Newton. Para os leitores que estão familiarizados com a notação de somatório, a expressão acima, para o desenvolvimento do binômio de Newton, pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}y^j.}$$

No que segue, colecionamos algumas aplicações dessa fórmula.

Exemplo 1. *Aplicando a fórmula do binômio de newton para $n = 2$ e 3 obtemos:*

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2,$$
$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3.$$

Calculando os valores dos números binomiais das expressões acima, vemos que elas coincidem com os produtos notáveis colecionados no início do texto.

Exemplo 2. *Como $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ e $\binom{4}{4} = 1$, temos que a fórmula obtida ao aplicarmos o binômio de Newton para desenvolver $(x+y)^4$ é idêntica à que havíamos obtido anteriormente, na equação 1.*

Exemplo 3. *Mostre que, para todo número natural n, vale a seguinte identidade:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Prova. Observe que $2^n = (1+1)^n$ e veja que, fazendo $x = y = 1$ no desenvolvimento do binômio de Newton para $(x+y)^n$, temos que todos os termos da forma $x^{n-j}y^j$ são iguais a 1. Dessa forma, o que resta na fórmula de tal desenvolvimento é

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

□

Observe que a fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton também pode ser utilizado para expandir expressões do tipo $(x-y)^n$. A diferença é que, nesse caso, os sinais das parcelas alternar-se-ão entre sinais $+$ e sinais $-$; a razão disso é que $(x-y)^n = (x+(-y))^n$, e podemos usar o binômio para desenvolver a última expressão, obtendo

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}(-y) + \cdots \\ \cdots + \binom{n}{j}x^{n-j}(-y)^j + \cdots + \binom{n}{n}(-y)^n.$$

Como $(-y)^j = (-1)^j y^j$, observe que o sinal do monômio $x^{n-j}y^j$ será $+$ se, e só se, j for par, o que resulta na seguinte identidade:

$$\boxed{\begin{aligned}(x-y)^n &= \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}y + \\ &+ \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots \\ &\cdots + (-1)^n\binom{n}{n}y^n.\end{aligned}}$$

Exemplo 4. *Encontre e expansão de $\left(a^3 - \frac{1}{b}\right)^4$, obtida pelo Binômio de Newton.*

Solução. Lembre-se de que

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$$

Substituindo $x = a^3$ e $y = \frac{1}{b}$ na expressão acima (fique atento para os sinais alternados), obtemos

$$\left(a^3 - \frac{1}{b}\right)^4 = a^{12} - \frac{4a^9}{b} + \frac{6a^6}{b^2} - \frac{4a^3}{b^3} + \frac{1}{b^4}.$$

□

3 Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é uma maneira de listar organizadamente os números binomiais. Nele, costumamos posicioná-los de forma a lembrar a figura de um triângulo, daí o nome.

Linha 0:	$\binom{0}{0}$					
Linha 1:	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
Linha 2:	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
Linha 3:	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
Linha 4:	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
Linha 5:	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Figura 1: as cinco primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

Linha 0:	1					
Linha 1:	1	1				
Linha 2:	1	2	1			
Linha 3:	1	3	3	1		
Linha 4:	1	4	6	4	1	
Linha 5:	1	5	10	10	5	1

Figura 2: as cinco primeiras linhas do Triângulo de Pascal, após calcular o valor de cada um dos números binomiais.

O interessante é que, ao organizarmos os números binomiais dessa forma, várias relações entre eles podem ser visualizadas de forma clara. Vamos ver apenas duas dessas relações neste material, mas veremos outras delas em materiais futuros. O Triângulo de Pascal, na verdade, foi descoberto pelo matemático chinês Yang Hui, ainda no século XIII. Contudo, o estudo detalhado de suas propriedades foi feito apenas 500 anos depois, pelo matemático francês Blaise Pascal.

As linhas e as colunas do Triângulo de Pascal são numeradas. Ao fazermos tal numeração, devemos sempre iniciar a contagem pelo número 0 (e não pelo número 1). Feito isso, escreve-se o número binomial $\binom{n}{k}$ na k-ésima coluna da n-ésima linha. O resultado é exibido na Figura 1. De outro modo, calculando-se o valor de cada um dos números binomiais, obtemos o triângulo da Figura 2.

Comparando a definição do Triângulo de Pascal com o desenvolvimento do Binômio de Newton, é imediato observar que:

> Os números que aparecem na "linha n" do Triângulo de Pascal são precisamente os coeficientes que aparecem no desenvolvimento do Binômio de Newton $(x+y)^n$.

A primeira relação para a qual chamamos a atenção do leitor é uma consequência imediata do fato acima, juntamente com o Exemplo 3:

> A *soma dos números binomiais da "linha n"* do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.

A segunda relação é conhecida é a *relação de Stifel*, também conhecida como a *regra de Pascal*. Ela é muito importante, pois nos permite calcular rapidamente as entradas das primeiras linhas do Triângulo de Pascal sem a necessidade de calcular fatoriais e sem fazer qualquer operação de divisão. Assim, ela nos fornece uma maneira prática e rápida de desenhar as primeiras linhas do triângulo sem a necessidade de memorizar seus termos.

Proposição 5 (Relação de Stifel/Regra de Pascal). *Para k e n inteiros tais que $1 \leq k \leq n$, temos:*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Prova algébrica. Basta escrevermos o valor dos binomiais do lado esquerdo da equação, colocar em evidência o que for possível e simplificando o restante:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{k+(n-k+1)}{(n-k+1)k}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{n+1}{(n-k+1)k}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Prova combinatória. Seja n um inteiro positivo. Suponha que, de um grupo de $n+1$ pessoas, que inclui você e outras n pessoas, desejamos formar um comitê de k pessoas que represente o grupo. Claramente, o número de possíveis comitês é igual a $\binom{n+1}{k}$.

Agora, observe, que podemos classificar cada comitê como sendo de um dos seguintes tipos: (a) aqueles em que você participa; (b) aqueles em que você não participa.

Para formar um comitê em que você participa, devemos escolher, dentre as outras n pessoas, quais serão as $k-1$ pessoas que participarão do comitê junto com você. Dessa forma, existem $\binom{n}{k-1}$ comitês do tipo (a). Por outro lado, para montar um comitê do qual você não participa, devemos simplesmente escolher k pessoas dentre as n pessoas diferentes de você. Dessa forma, existem $\binom{n}{k}$ comitês do tipo (b).

Como a soma das quantidade de comitês de cada tipo é igual ao total de comitês, podemos concluir corretamente que:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

$\square$

Observação 6. *Também é comum encontrar a Relação de Stifel escrita da seguinte forma:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

A Figura 3, ilustra como a relação de Stifel pode ser visualizada dentro do Triângulo de Pascal. Veja que, se já tivermos os valores do números binomiais de uma determinada linha do Triângulo de Pascal, podemos usar tal relação para encontrar facilmente os valores da linha seguinte, realizando apenas operações de adição. Por exemplo, para obter a Linha 6 do triângulo fazemos o seguinte: começamos colocando o número 1 na primeira coluna, uma vez que $\binom{n}{0} = 1$ para todos inteiro positivo n; em seguida, basta somar dois termos consecutivos da linha anterior (no caso, a Linha 5) e escrever o resultado da soma logo abaixo do termo da direita. Por exemplo, observe que nas Linhas 5 e 6 da Figura 3, temos: $1+5=6$, $5+10=15$ e assim por diante. Para finalizar uma linha, deve-se então colocar o número 1, de modo que ela fique com uma coluna a mais do que a linha anterior.

3.1 Calculando linha a linha os termos do Triângulo de Pascal

Nesta seção, veremos como encontrar os valores dos números binomiais situados em uma linha específica do Triângulo de Pascal de modo rápido, sem a necessidade de conhecer as linhas anteriores (com uma única desvantagem de que o método de cálculo envolve o uso de multiplicações e divisões). Claramente, o objetivo é determinar, para um dado n, os valores de $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Para isso, bastará lembrar que $\binom{n}{0} = 1$ e, em seguida, aplicar n vezes a proposição a seguir.

Proposição 7. *Para k e n inteiros tais que $0 \le k \le n$, vale que:*

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

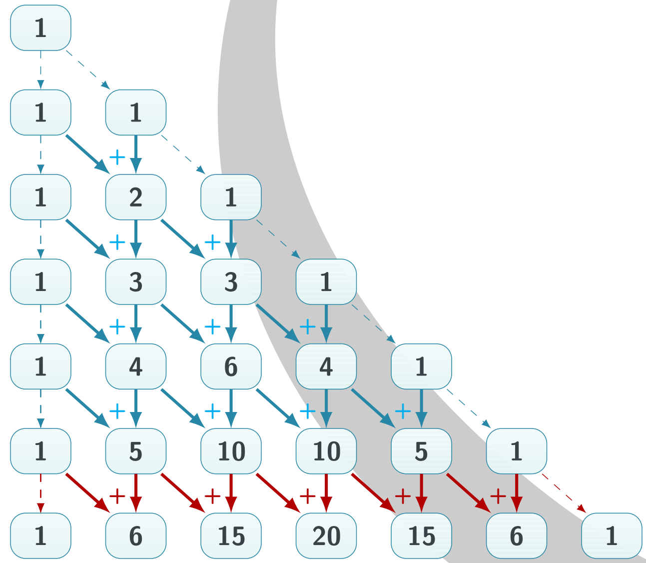

Figura 3: representação da Relação de Stifel, também conhecida como Regra de Pascal. A figura foi obtida adaptando-se o código de Paul Gaborit, em `http://www.texample.net/tikz/examples/pascals-triangle-and-sierpinski-triangle/`.

Prova. Basta ver que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!}\\ &= \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 8. *Encontre os valores de $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \ldots, \binom{5}{5}$ usando apenas a proposição acima (ou seja, sem olhar para o Triângulo de Pascal).*

Solução. Lembre-se de que $\binom{5}{0} = 1$. Para encontrar as demais entradas da linha 5, basta aplicar cinco vezes a fórmula da Proposição 7:

$$\begin{aligned}\binom{5}{1} &= \frac{5}{1}\binom{5}{0} = \frac{5}{0}\cdot 1 = 5,\\ \binom{5}{2} &= \frac{4}{2}\binom{5}{1} = \frac{4}{2}\cdot 5 = 10,\\ \binom{5}{3} &= \frac{3}{3}\binom{5}{2} = \frac{3}{3}\cdot 10 = 10,\\ \binom{5}{4} &= \frac{2}{4}\binom{5}{3} = \frac{2}{4}\cdot 10 = 5,\\ \binom{5}{5} &= \frac{1}{5}\binom{5}{4} = \frac{1}{4}\cdot 5 = 1.\end{aligned}$$

É interessante observar que, em cada passo, temos o produto de uma fração pelo número binomial obtido no passo anterior. Tal fração, por sua vez, é obtida diminuindo-se o numerador e aumentando-se o denominador da fração anterior em uma unidade. □

Observação 9. *Observe que podemos usar o método acima descrito para encontrar o desenvolvimento do binômio de Newton, quando n não é muito grande. Por exemplo, para calcular $(x+y)^5$, começando colocando os monômios:*

$$\_\_\_\ x^5 + \_\_\_\ x^4y + \_\_\_\ x^3y^2 + \_\_\_\ x^2y^3 + \_\_\_\ xy^4 + \_\_\_\ y^5.$$

Em seguida, colocamos o número 1 no primeiro espaço e calculamos os coeficientes dos demais monômios um a um, pelo método anterior. Veja que o coeficiente de cada monômio é sempre obtido multiplicando o coeficiente anterior pelo expoente de x no monômio anterior e dividindo-o pelo expoente de y no monômio atual. O resultado obtido (omitindo-se os coeficientes que são iguais a 1) é:

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Deixamos como exercício para leitor verificar a seguinte identidade.

Problema 10. *Mostre que, para n e k inteiros tais que $0 \le k \le n$, vale a seguinte identidade:*

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Observamos que há outras maneiras de desenhar o Triângulo de Pascal. Por exemplo, podemos alinhar os números de modo que eles formem um triângulo equilátero, em vez de um triângulo retângulo. Umas das maneiras mais comuns é a exibida na Figura 4.

Linha 0: 1
Linha 1: 1 1
Linha 2: 1 2 1
Linha 3: 1 3 3 1
Linha 4: 1 4 6 4 1
Linha 5: 1 5 10 10 5 1
Linha 6: 1 6 15 20 15 6 1

Figura 4: outra representação do Triângulo de Pascal.

Para finalizar esta seção e provocar a curiosidade do leitor, exibimos um desenho do Triângulo de Pascal (ver Figura 5) no qual os números binomiais pares são coloridos de laranja e os ímpares de azul. O resultado segue um belo padrão, que é o mesmo padrão de cores de um famoso fractal, o Triângulo de Sierpinski (veja a Figura 6).

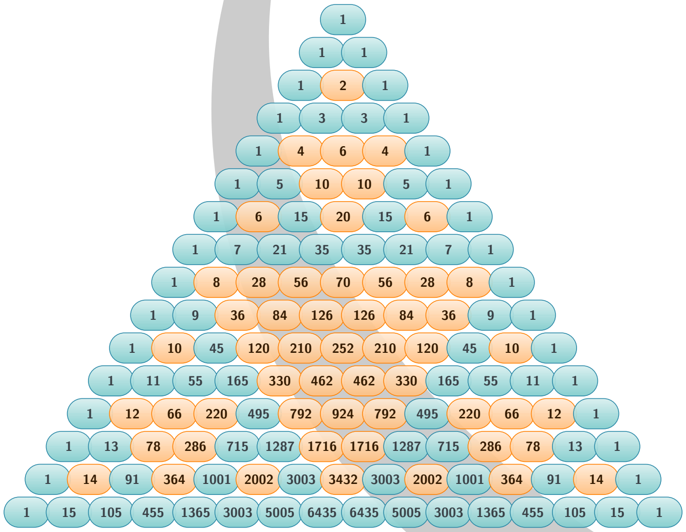

Figura 5: os números binomiais pares foram coloridos de laranja e os ímpares de azul. O resultado é uma coloração semelhante à do Triângulo de Sierpinski. A figura acima foi obtida adaptando-se um código de Paul Gaborit `http://www.texample.net/tikz/examples/pascals-triangle-and-sierpinski-triangle/`.

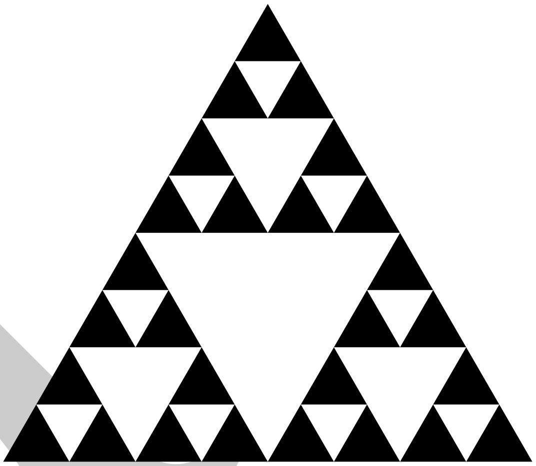

Figura 6: o Triângulo de Sierpinski.

Dicas para o Professor

É interessante revisar os módulos de “Expressões Algébricas e Polinômios” e de “Produtos Notáveis” para que fiquem claros os significados de termos como “monômio”, “coeficiente” e “parte literal”.

Neste material teórico, concentramo-nos principalmente no desenvolvimento da teoria em si; portanto, nele há poucos exemplos ou exercícios resolvidos. Contudo, um dos motivos para isso é que o 'Caderno de Exercícios' desse módulo contém mais de quarenta exercícios com respostas ou soluções. Ressaltamos que é muito importante a resolução de exercícios em sala de aula. Assim, é recomendado que o Caderno de Exercícios seja abordado em paralelo a este material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, Rio de Janeiro, 2000.

2. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.