Material Teórico - Módulo Equações Algébricas - Raízes e Coeficientes

Fórmula Resolutiva para Equação do Segundo Grau

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

31 de janeiro de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula estudaremos as formulas resolventes para equações polinomiais de segundo e de terceiro grau. Ou seja, expressões que nos permitem calcular de modo direto às raízes em função dos coeficientes do polinômio.

2 Equações de segundo grau

Vamos revisar rapidamente como obter a fórmula resolvente de equações polinomiais de segundo grau. Esta fórmula é conhecida popularmente como "fórmula de Bhaskara". Na verdade, ela foi apenas popularizada por Bhaskara, um matemático Indu, no Século XII. Mas acredita-se ter sido desenvolvida por um matemático, também Indu, chamado Sridhara, no Século X.

Para obter a fórmula, basta usar o método de completar quadrados. Para uma introdução mais detalhada ao método, recomendamos a leitura do Módulo "Equações do Segundo Grau" do Nono Ano do Ensino Fundamental. Aqui, vamos apenas aplicá-lo diretamente.

Considere uma equação de segundo grau escrita na forma abaixo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

onde a, b e c são reais dados, sendo $a \neq 0$.

Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os lados de (9) por a. (Isso tornará mais fácil completar quadrados.) Assim fazendo, temos que:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right) x + \frac{c}{a} = 0$$

ou, ainda,

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right) x = -\frac{c}{a}.$$

Para completar o trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo, basta somar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Fazendo isso em ambos os lados (a fim de não alterar a equação), obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Para tornar esta expressão mais curta, é costume denotar o termo b^2-4ac pela letra grega maiúscula delta, cujo símbolo é Δ. Assim, escrevemos

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{2}$$

Esse valor de delta é também conhecido como o **discriminante** da equação do segundo grau (9). Com o auxílio do mesmo, a equação reduz-se agora a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3}$$

Como o lado esquerdo da equação (3) é não negativo para todo valor real de x, e como $4a^2$ é sempre positivo, se o valor de Δ for negativo, concluímos que nenhum valor de x irá satisfazer a equação (3). Sendo assim, nesse caso a equação original também não terá solução.

Agora, quando $\Delta \geq 0$, podemos reescrever (3) como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2, \tag{4}$$

de sorte que

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

No primeiro caso obtém-se:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ao passo que, no segundo, obtém-se

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Para facilitar a memorização, os dois casos acima são escritos em uma única linha com o sinal $\pm$. Observe que, quando $\Delta = 0$, esses dois valores coincidem.

Resumimos a discussão acima no quadro a seguir:

> Se $\Delta \geq 0$, as soluções da equação
>
> $$ax^2 + bx + c = 0,$$
>
> onde $a \neq 0$, podem ser obtidas pela fórmula:
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Observação 1. *Já vimos que a equação não possui soluções quando $\Delta < 0$. Ou seja, a equação não possui raízes reais. Também conforme observamos acima, no caso em que $\Delta = 0$ os dois valores obtidos para x serão iguais, e a equação possui apenas uma solução. Ainda nesse caso, dizemos que a equação possui uma raiz (real)* dupla*. Por fim, quando $\Delta > 0$, a equação possui (exatamente) duas soluções/raízes reais distintas.*

3 Equações de terceiro grau

3.1 Coeficiente quadrático nulo

Vamos agora encontrar um fórmula para equações de terceiro grau. Começaremos com o caso particular, limitando-se a resolver equações em que o coeficiente do termo quadrático é igual a zero, para depois prosseguirmos para o caso geral.

Sem perda da generalidade, vamos assumir também que o coeficiente de x^3 é igual a 1. Ou seja, suponhamos que você queira resolver uma equação no seguinte formato:

$$\boxed{x^3 + px + q = 0.} \tag{5}$$

Entenda que p e q são os coeficiente da equação (constantes) e que x é nossa incógnita. Assim, nosso objetivo é separar x, escrevendo-o como uma função direta das demais variáveis. Vamos fazer um substituição a fim de obter uma nova equação com incónigta u, fazendo:

$$x = u - \frac{p}{3u}.$$

Temos que

$$\left(u - \frac{p}{3u}\right)^3 + p\left(u - \frac{p}{3u}\right) + q = 0$$

Usando o produto notável para expandir o cubo, temos:

$$\begin{aligned}\left(u^3 - 3u^2\frac{p}{3u} + 3u\frac{p^2}{9u^2} - \frac{p^3}{27u^3}\right) + pu - \frac{p^2}{3u} + q &= 0,\\ u^3 - \cancel{up} + \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{3}u} - \frac{p^3}{27u^3} + \cancel{pu} - \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{3}u} + q &= 0,\\ u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q &= 0. \qquad (6)\end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por u^3 obtemos:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

em que p e q são conhecidos. Agora, temos uma equação bastante simples, que pode ser resolvida pela substituição $u^3 = z$. Isso nos dá a equação de segundo grau na variável z:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{7}$$

que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara. Temos que:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}.$$

A expressão acima pode ser simplificada para:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad \text{ou alternativamente,}$$
$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Observe que, o lado direito está todo em função de p e q e há dois possíveis valores para ele, a depender do sinal "$\pm$" ser substituído por "$+$" ou "$-$". Veja ainda que, em cada um destes dois casos, no universo dos complexos, existem 3 possível valores de u que satisfazem a expressão (as raízes cúbicas complexas do lado direito da equação). Encontrando cada uma delas e substituindo na expressão $x = u - \frac{p}{3u}$ obtemos os possíveis valores de x. Isso pode ser bastante trabalhoso, pois no processo seria necessário calcular $1/u$. Vamos usar uma estratégia para simplificar esses cálculos.

Seja $v = -p/(3u)$, de modo que $x = u+v$. Já sabemos que u^3 é uma das raízes da equação (7) e o produto de tais raízes é $-p^3/27$. Assim, a outra raiz desta equação é justamente o número $\frac{-p^3}{27u^3}$, que é igual a v^3. Logo, se

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

então

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

e vice-versa (ou seja, quando usamos o sinal de "$-$" antes da raiz quadrado da expressão dada para u^3 usamos o sinal de "$+$" na posição análoga para v^3). Como $x = u + v$, em ambos os casos podemos escrever:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

A fórmula acima é conhecida como **fórmula de Cardano** e já chegamos a utilizá-la e a contar histórias sobre ela no Módulo "Números Complexos-Forma Algébrica" do Terceiro Ano do Ensino Médio.

Apesar da expressão em si não ser tão difícil de memorizar, utiliza-la ainda é algo bastante trabalhoso, pois é preciso observar que cada uma das raízes cúbicas devem ser resolvidas como raízes cubicas complexas. Assim, há 3 possíveis valores para cada uma delas, para um total de 9 *possíveis* soluções. Contudo, a equação original possui apenas 3 soluções, de modo que dentre essas 9 possibilidade algumas podem ser inválidas (é necessário que toda solução seja um desses 9 números, mas nem todos eles precisam ser solução). De fato, para cada uma das raízes complexas do primeiro radical, apenas uma das raízes complexas do segundo radical gera uma solução válida para a equação original (aquela que satisfaz $v = -p/(3u)$).

No caso em que p e q são reais e $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ a fórmula pode ser bastante útil para achar pelo menos um raiz real (considerando as raízes cúbicas reais). Em seguida, podemos dividir o polinômio original por $x - r$ onde r é a raiz encontrada, para encontrar as demais raízes. Lembre-se de que, quando p e q são reais a equação sempre possui pelo menos uma raiz real.

Porém, o número $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ pode ser negativo (ou mesmo não real, no caso em que p ou q não forem reais), o que faz com que $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ seja um complexo não real. Por outro lado, e torna mais trabalhoso calcular suar rais cúbica. Na prática, acaba sendo mais conveniente buscar raízes usando heurísticas, como temos feitos em módulos anteriores (como o teste das raízes racionais, no caso de p e q serem racionais); ou mesmos usando métodos computacionais para encontrar aproximações ou método baseados em Cálculo (não estudados aqui).

3.2 Coeficiente quadrático não nulo

Para resolver uma equação de terceiro grau qualquer, vamos usar uma mudança de variáveis para reduzir o problema ao caso da subseção anterior.

Considere a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{8}$$

em que $a \neq 0$. Dividindo ambos os lados por a, obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Ou seja, temos uma equação no formato

$$x^3 - Sx^2 + Tx - P = 0. \tag{9}$$

CUIDADO: deliberadamente, usamos sinais alternados nos coeficientes da expressão acima. Veja que, pelas relações de Girard (veja o Módulo Equações Algébricas-Propriedades das Raízes), temos que $S = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação $x^3 - Sx^2 + Tx - P = 0$ enquanto P é o produto delas.

Mostraremos como eliminar o termo $-Sx^2$ fazendo uma mudança de variável. Vejamos como através de um exemplo.

Exemplo 2. *Resolva a equação de terceiro grau*

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 1.$$

Solução. Pelas relações de Girard, temos que a soma das raízes desta equação é dada por:

$$S = -\frac{-6}{1} = 6.$$

Precisamos de uma mudança de variável que faça com que na nova equação o termo quadrático seja zero, ou seja, a soma das raízes seja zero. Uma maneira de fazer isso é tomando:

$$z = x - 2.$$

Isso porque $2 = S/3$, e a equação possível 3 raízes complexas (contando multiplicidades). Deste modo, ao subtrair 2 de cada uma das raízes, reduzimos a soma das raízes em 6 unidades e teremos uma equação cuja soma das raízes é zero. Vejamos. Como $x = z + 2$, temos:

$$(z+2)^3 - 6(z+2)^2 + 4(z+2) + 1 = 0.$$

Expandindo as potências temos:

$$(z^3 + 6z^2 + 12z + 8) - 6(z^2 + 4z + 4) + 4z + 8 + 1 = 0,$$

o que pode ser simplificado para

$$z^3 - 8z - 7 = 0.$$

Bem, para resolver esta equação, o mais simples seria usar o teste das raízes racionais para concluir que -1 é uma de suas raízes. Depois, dividir por $z+1$ e resolver uma equação de segundo grau, para concluir que os três possíveis valores de z são -1, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$ e $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$. Para encontrar os valores de x, basta somar 2 a cada um deses valores.

Mas se quisermos usar a fórmula de Cardano, teríamos que tomar $p = -8$ e $q = -7$ e aplicar na fórmula. Isso nos dá

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} - \frac{8^3}{27} = \frac{1323 - 2048}{4 \cdot 27} = \frac{-725}{108}.$$

Logo,

$$z = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{5i}{6}\sqrt{\frac{29}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{5i}{6}\sqrt{\frac{29}{3}}}.$$

Simplificar a expressão acima e ainda descobrir qual raiz complexa do primeiro radical deve ser pareada com qual raiz do segundo é bastante trabalhoso. Mas produziria como resultado as mesmas 3 raízes encontradas anteriormente.

$\square$

Usando a primeira parte do exemplo acima, fica claro que, no caso geral de uma equação da forma

$$x^3 - Sx^2 + Tx - P = 0,$$

basta fazer a substituição $x = z + (S/3)$. O resultado nos garantirá uma equação de terceiro grau em z onde o coeficiente de z^2 é igual a zero. Independentemente de optarmos por aplicar ou não a fórmula de Cardano, tal equação costuma ser mais simples de resolver do que a equação original.

Dicas para o Professor

Este material se propões a apresentar de forma bastante direta uma justificativa para a fórmula de resolução de equações de segundo grau (Fórmula de Bhaskara) afim de, em seguida, chegar ao caso especial de equações de terceiro grau. O intuito é chegar às fórmula de maneira resolvente da equação de terceiro grau na aula seguinde, de uma maneira breve. E dar exemplos de como aplicar tais fórmula. Isso pode ser feito rapidamente, em um ou dois, encontros de 50 minutos.

Ressaltamos que a parte sobre "completar quadrados" é abordado de maneira bem mais ampla no Módulo "Equações do Segundo Grau" do Nono Ano do Ensino Fundamental, começando de casos mais simples e justificando a intuição por detrás de cada operação, dando a devida atenção que o tema merece.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.