

# **Material Teórico - Módulo FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO**

## **Frações e Suas Operações - Parte 2**

**Sexto Ano do Ensino Fundamental**

**Autor: Ulisses Lima Parente**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**23 de junho de 2025**



**PORTAL DA  
MATEMÁTICA**  
OBMEP

Nesta segunda parte, ilustramos as operações aritméticas com frações introduzidas na primeira parte discutindo alguns problemas que envolvem tais operações. Os exemplos iniciais têm soluções simples e podem ser resolvidos diretamente, por meio de uma ou duas operações. Os problemas finais envolvem, além de operações com frações, ideias mais rebuscadas.

**Exemplo 1.** *Alfredo foi de carro da sua casa até um posto de gasolina. No início do trajeto, o marcador do nível de combustível apontava que o volume de gasolina correspondia a  $\frac{3}{5}$  da capacidade do tanque. Chegando ao posto, Alfredo colocou combustível correspondente a  $\frac{19}{35}$  do tanque para enchê-lo completamente. Que fração corresponde à quantidade de combustível consumida no trajeto da casa de Alfredo até o posto?*

**Solução.** Veja que, se Alfredo tivesse abastecido antes de ir ao posto, quando o marcador apontava que o volume de combustível correspondia a  $\frac{3}{5}$  do tanque, ele teria colocado gasolina correspondente a  $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$  do tanque para enchê-lo. Portanto, a fração do tanque consumida no trajeto é dada pela diferença

$$\frac{19}{35} - \frac{2}{5}.$$

Para calcular essa diferença, note que o denominador 35 é múltiplo de 5, com  $35 = 5 \cdot 7$ , logo, a fração  $\frac{2}{5}$  é equivalente a  $\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$ , que tem o mesmo denominador de  $\frac{19}{35}$ . Desse modo, concluímos que

$$\frac{19}{35} - \frac{2}{5} = \frac{19}{35} - \frac{14}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

é a fração corresponde à quantidade de combustível consumida no trajeto da casa de Alfredo até o posto.  $\square$

**Exemplo 2.** *Se uma pessoa trabalhar durante o ano inteiro, de janeiro a dezembro, ela terá direito a um salário extra, que é chamado 13º salário. Mesmo que a pessoa não trabalhe o ano inteiro, ela deve receber o 13º salário proporcional aos meses*

*trabalhados durante aquele ano. Joaquim trabalhou de janeiro a agosto de 2024 como vendedor em uma loja de peças para automóveis e recebeu 1640 reais de 13° salário proporcional aos meses trabalhados. Qual foi o salário recebido por Joaquim em cada um dos meses de janeiro a agosto, supondo que ele não teve qualquer reajuste salarial nesse período?*

**Solução.** Joaquim trabalhou de janeiro a agosto, ou seja, por oito meses, durante o ano de 2024. Assim, ele deve receber  $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$  do valor do 13° salário que receberia se tivesse trabalhado durante o ano inteiro.

Desse modo,  $\frac{2}{3}$  do valor do 13° salário correspondem a 1640 reais. Daí, segue que  $\frac{1}{3}$  do 13° corresponde a  $1640 \div 2 = 820$  reais e, portanto,  $\frac{3}{3}$  do 13° salário (ou seja, o salário inteiro) correspondem a  $820 \cdot 3 = 2460$  reais.

Assim, o salário de Joaquim de janeiro a agosto foi de 2460 reais.  $\square$

**Exemplo 3.** *Resolva os problemas a seguir.*

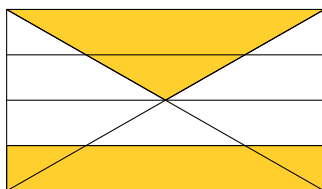
- (a) *Gabriel tinha 48 bolas de gude, mas doou  $\frac{3}{8}$  do que possuía para Levi. Com quantas bolas de gude Gabriel ficou?*
- (b) *Depois de doar as bolas de gude a Levi, Gabriel voltou pra casa. Quando conferiu o total de bolas de gude em seu bolso, percebeu que havia perdido algumas pelo caminho, pois havia somente  $\frac{4}{5}$  do que deveria haver depois da doação que fez a Levi. Quantas bolas de gude Gabriel perdeu no caminho de volta para casa?*

**Solução.** Como Gabriel doou  $\frac{3}{8}$  de suas bolas de gude para Levi, ele ficou com  $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$  das bolas de gude que possuía. Para calcular quantas bolas de gude correspondem a  $\frac{5}{8}$ , note que as 48 bolas de gude correspondem a  $\frac{8}{8}$ , logo,  $\frac{1}{8}$  corresponde a  $48 \div 8 = 6$  bolas de gude. Portanto,  $\frac{5}{8}$  correspondem a  $5 \cdot 6 = 30$  bolas de gude, ou seja, Gabriel ficou com 30 bolas de gude depois da doação que fez a Levi. Isso responde o item (a).

Para o item (b), veja que, após a doação, as 30 bolas de gude que restaram com Gabriel correspondem a  $\frac{5}{5}$ . Então,

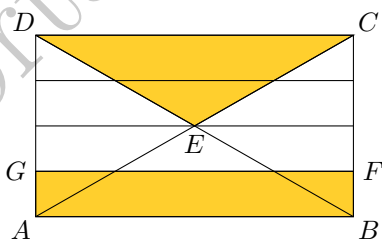
ele perdeu  $\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$  pelo caminho, o que corresponde a  $30 \div 5 = 6$  bolas de gude.  $\square$

**Exemplo 4 (OBMEP).** *Os segmentos horizontais dividem o retângulo da figura em quatro faixas de mesma largura. A área da região amarela corresponde a qual fração da área do retângulo?*



- (a)  $\frac{1}{3}$ .
- (b)  $\frac{5}{12}$ .
- (c)  $\frac{1}{2}$ .
- (d)  $\frac{7}{12}$ .
- (e)  $\frac{2}{3}$ .

**Solução.** Vamos destacar alguns pontos com o objetivo de fazer referência a alguns polígonos presentes na figura.



É claro que a área do retângulo  $ABFG$  é igual a  $\frac{1}{4}$  da área de  $ABCD$ , pois, pelo enunciado, a medida de  $AG$  é igual a  $\frac{1}{4}$  de  $AD$ .

Por outro lado, a área do triângulo  $ACD$  é igual à metade da área do retângulo  $ABCD$ .

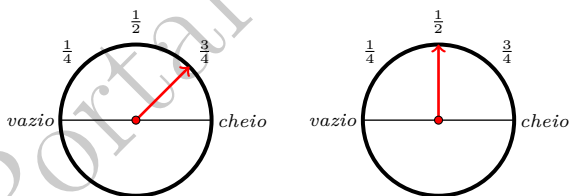
Além disso, os triângulos  $AED$  e  $CED$  têm áreas iguais, pois, uma vez que as diagonais de um retângulo se encontram em seus pontos médios, temos  $AE = CE$  e o vértice  $D$  é comum aos dois triângulos, o que significa que suas alturas a partir de  $D$  são iguais. Desse modo, a área de  $CED$  é igual à metade da área de  $ACD$ , ou seja, é igual a  $\frac{1}{4}$  da área do retângulo  $ABCD$ .

Concluimos, assim, que a área da região amarela, que é dada pela soma das áreas do retângulo  $ABFG$  e do triângulo  $CED$  é igual a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

da área do retângulo  $ABCD$ . □

**Exemplo 5 (CMF).** *Nos painéis dos automóveis há um marcador que indica a quantidade de combustível no tanque. Através de um ponteiro, o marcador indica a fração de combustível existente no tanque em relação à capacidade máxima. Quando o ponteiro aponta para a posição “cheio”, significa que o tanque está completo de combustível. As figuras abaixo representam o marcador de combustível de um automóvel no momento da partida e no momento da chegada de uma viagem.*



*Que fração do tanque de combustível foi utilizada na viagem?*

**Solução.** Veja que, no momento da partida, o tanque estava com  $\frac{3}{4}$  de sua capacidade e, na chegada, estava com  $\frac{1}{2}$  de sua capacidade. Assim, a fração que representa o total de gasolina consumido na viagem é dada pela diferença  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ .

Como as frações  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  têm denominadores distintos, devemos encontrar duas frações equivalentes a elas e que possuam denominadores iguais. Como 4 é múltiplo de 2 (pois  $4 = 2 \cdot 2$ ),

podemos encontrar uma fração com denominador 4 equivalente a  $\frac{1}{2}$  multiplicando numerador e denominador dessa fração por 2. Assim, obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4},$$

ou seja,  $\frac{1}{4}$  é a fração do tanque de combustível utilizada na viagem.  $\square$

**Exemplo 6.** Em um passeio ciclístico, os participantes percorreram  $\frac{1}{4}$  do percurso na primeira hora,  $\frac{2}{5}$  do percurso na segunda hora e 14 quilômetros na terceira e última hora de passeio. Quantos quilômetros tem o percurso total do passeio?

- (a) 14.
- (b) 16.
- (c) 40.
- (d) 36.

**Solução.** A ideia para resolver o problema é calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora de passeio. Para isso, devemos somar as frações correspondentes ao total percorrido na primeira e segunda horas e, em seguida, subtrair o resultado de 1 inteiro, que corresponde ao percurso total do passeio.

Para somar as frações  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{2}{5}$ , uma vez que elas não têm um mesmo denominador, devemos encontrar duas frações, uma equivalente a  $\frac{1}{4}$  e outra equivalente a  $\frac{2}{5}$ , que tenham denominadores iguais. Assim, obtemos

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}.$$

Agora, note que  $\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$  é a fração do percurso que falta para completá-lo. Por sua vez, essa fração corresponde aos 14 quilômetros percorridos durante a terceira hora. Então,

$$\frac{7}{20} \longrightarrow 14 \text{ km};$$

$$\frac{1}{20} \longrightarrow 14 \div 7 = 2 \text{ km};$$

$$\frac{20}{20} \longrightarrow 20 \cdot 2 = 40 \text{ km}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (c). □

**Exemplo 7** (CMRJ). *Em um passeio em família, Jorge levou embalagens com bebidas em uma caixa de isopor, de formato cúbico, cujas arestas internas mediam 28 cm. Para manter as bebidas geladas, Jorge colocou cubinhos de gelo dentro do isopor, completando toda a sua capacidade, sendo o volume de gelo colocado igual a  $\frac{2}{5}$  do volume total das bebidas (desconsidere o volume das embalagens). Ao final do passeio, toda a bebida havia sido consumida e suas embalagens haviam sido jogadas na lixeira. Nenhum cubinho de gelo foi retirado do isopor durante o passeio. Sendo assim, a água formada pelo derretimento de todos os cubinhos de gelo atingiu uma altura de 3cm. Sabendo que cada embalagem possuía 420 mL (mililitros) de bebida, a quantidade de embalagens colocadas no isopor, para esse passeio em família, é um número múltiplo de:*

- (a) 3.
- (b) 5.
- (c) 7.
- (d) 9.
- (e) 11.

**Solução.** O volume da caixa de isopor é dado por  $28^3 \text{ cm}^3$ , o que é o mesmo que  $28^3 \text{ mL}$ , uma vez que  $1 \text{ cm}^3$  corresponde a  $1 \text{ mL}$ .

Por outro lado, como a altura da água na caixa após o derretimento do gelo era  $3 \text{ cm}$ , esse volume corresponde a  $\frac{3}{28}$  do volume da caixa, ou seja, corresponde a  $\frac{3}{28}$  de  $28^3 \text{ mL}$ , que é igual a

$$\frac{3}{28} \cdot 28^3 = 3 \cdot 28^2 \text{ mL}.$$

É dito que o volume do gelo, que, após o derretimento, é igual ao volume de água na caixa, corresponde a  $\frac{2}{5}$  do volume das bebidas. Desse modo, temos

$$\frac{2}{5} \longrightarrow 3 \cdot 28^2 \text{ mL};$$

$$\frac{1}{5} \longrightarrow \frac{3 \cdot 28^2}{2} = 3 \cdot 14 \cdot 28 \text{ mL};$$

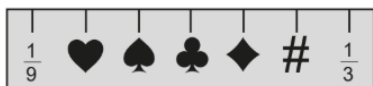
$$\frac{5}{5} \longrightarrow 5 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 28 \text{ mL}.$$

Por fim, como o volume de cada embalagem é  $420 \text{ mL}$  e  $420 = 3 \cdot 10 \cdot 14$ , chegamos ao total de

$$\frac{5 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{14} \cdot 28}{\cancel{3} \cdot 10 \cdot \cancel{14}} = \frac{\cancel{3} \cdot 28}{\cancel{10}_2} = 14 \text{ embalagens}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra (c). □

**Exemplo 8 (OBMEP).** A figura representa uma régua especial, na qual as distâncias entre tracinhos consecutivos são iguais. Qual é o símbolo que indica  $\frac{2}{9}$ ?



**Solução.** Veja que a diferença entre  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{9}$  é

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Portanto,  $\frac{2}{9}$  é a medida do segmento da régua que vai de  $\frac{1}{9}$  a  $\frac{1}{3}$ .

Por outro lado, esse segmento está dividido em 6 segmentos iguais, logo, a medida de cada um deles é igual a

$$\frac{2}{9} \div 6 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{54} = \frac{1}{27}.$$

Finalmente, veja que o segmento da régua que vai da marcação  $\frac{1}{9}$  à marcação de  $\frac{2}{9}$  tem comprimento

$$\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9};$$

também, como

$$\frac{1}{9} \div \frac{1}{27} = \frac{1}{9} \cdot 27 = 3,$$

concluimos que cabem três segmentos de comprimento  $\frac{1}{27}$  no segmento que vai de  $\frac{1}{9}$  a  $\frac{2}{9}$ .

Assim, o símbolo que indica  $\frac{2}{9}$  é ♣.

□

**Exemplo 9 (CMRJ - Adaptado).** *Cecília aproveitou um período da manhã de sábado para estudar Língua Portuguesa, Redação e Matemática, realizando um intervalo para beber água e fazer um lanche rápido. Ela utilizou  $\frac{1}{6}$  do período para resolver exercícios de Língua Portuguesa e, depois,  $\frac{3}{10}$  do restante do período para fazer uma redação. Em seguida, veio o intervalo, que durou 28 minutos. Por fim, Cecília gastou  $\frac{1}{2}$  do tempo total para a resolução de questões de Matemática. Quantos minutos ela gastou para fazer a redação?*

- (a) 56.
- (b) 84.
- (c) 100.
- (d) 140.
- (e) 168.

**Solução.** Depois que Cecília utilizou  $\frac{1}{6}$  do tempo reservado para resolver exercícios de Língua Portuguesa, restaram  $\frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  do tempo total. Assim, a fração do tempo reservada à redação foi

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

Depois do intervalo de 28 minutos, Cecília gastou  $\frac{1}{2}$  do tempo total com as questões de Matemática. Portanto, a fração do tempo total gasto com as atividades de Língua Portuguesa, Redação e Matemática foi

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} = \frac{11}{12}.$$

A fração que resta do tempo total,  $\frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$ , corresponde ao intervalo de 28 minutos. O tempo utilizado para a redação corresponde a  $\frac{1}{4}$  do total o que é o mesmo que  $\frac{3}{12}$ ; assim,

$$\frac{1}{12} \longrightarrow 28 \text{ min};$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} \longrightarrow 3 \cdot 28 = 84 \text{ min}.$$

Concluimos que Cecília gastou 84 minutos para compor a redação, de modo que a alternativa correta é (b).  $\square$

## Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que os professores deixem os alunos refletirem sobre os exemplos apresentados por alguns minutos, antes de explicarem as soluções. Ressaltamos a importância de que os alunos tentem encontrar as soluções por meios próprios. Por outro lado, ainda que eles não as encontrem, ou apresentem uma solução errada, esse processo é fundamental para a aprendizagem.

É recomendável que o professor faça uma revisão sobre equivalência de frações antes de apresentar os exemplos deste material. No exemplo 8, é importante que os alunos entendam que a ideia de divisão em partes iguais para números inteiros se aplica às frações.

Portal OBMEP