Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Funções e Imagem

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

3 de agosto de 2019

Nesta aula, faremos uma revisão das noções de função e de imagem de uma função.

1 Definição e exemplos de função

A noção de função já foi introduzida no Módulo *Função - Noções Básicas*, do Nono Ano. Aconselhamos a leitura desse módulo para que se tenha uma introdução mais intuitiva do conceito de função. Aqui, faremos apenas uma breve revisão da definição de função, dando alguns exemplos.

Sejam dados dois conjuntos A e B, ambos não vazios. Uma **função** com **domínio** A e **contradomínio** B é uma correspondência f que associa elementos do conjunto A a elementos do conjunto B, de tal modo que que as duas condições a seguir sejam satisfeitas:

(1) todo elemento a de A está associado a um elemento b de B;

(2) o elemento $b \in B$ associado ao elemento $a \in A$ é *único*.

Usamos a notação $f : A \to B$ para indicar que f é uma função com domínio A e contradomínio B. Também, escrevemos $b = f(a)$ para indicar que b é o único elemento de B associado ao elemento $a \in A$. Nesse caso, dizemos que b é a **imagem de a**.

O conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid b = f(a)\},$$

formado por todos os elementos do contradomínio B que são associados a algum elemento de A, é chamado **imagem da função f**.

Exemplo 1. *Uma correpondência que associa cada círculo do plano a seu centro é uma função, porque todo círculo tem um centro e esse centro é único.*

Exemplo 2. *Uma correspondência que associa a cada conjunto formado por três pontos do plano o baricentro do triângulo que os têm por vértices* ***não*** *é função. Isso ocorre porque a suposta correspondência não está bem definida, pois, se os três pontos forem colineares, não teremos triângulo.*

2 Função real de variável real

Uma função $f : A \to B$ é dita **real** se $B \subset \mathbb{R}$, ou seja, se seu contradomínio for um subconjunto do conjunto dos números reais. Isso significa que a imagem da cada elemento do domínio de f é um número real. Dizemos ainda que f tem **variável real** se $A \subset \mathbb{R}$, ou seja, se todo elemento de seu domínio for um número real.

Exemplo 3. *A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, dada por $f(n) = n/2$, é uma função real, pois seu contradomínio, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, está contido no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Ela também é uma função de variável real, pois seu domínio, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, está contido em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 4. *A função que associa a cada retângulo do plano sua área é real mas não tem variável real. De fato, seu domínio é formado pelo conjunto dos retângulos do plano, que não está contido em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 5. *A função f que associa a cada número inteiro o conjunto de seus divisores positivos tem variável real, pois seu domínio é formado por números inteiros, os quais são todos reais. Entretanto, ela não é uma função real, porque a imagem de cada elemento n do domínio é um* conjunto, *formado pelos divisores positivos de n. Por exemplo, $f(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.*

Seja f uma função real de variável real, tal que a imagem $f(x)$ de x é dada por uma *fórmula* (por exemplo, $f(x) = \sqrt{x}$). Frequentemente, é interessante encontrarmos o conjunto mais amplo possível que possa servir de domínio para f. Tal conjunto, ao qual chamaremos A, deve ser formado por *todos os números reais x tais que $f(x)$ seja um número real.* Esse conjunto é chamado **domínio maximal** da função f.

Em particular, se não for necessário impor restrições a x para que $f(x)$ tenha sentido, então o domínio maximal de f é *todo* o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6. *A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, a princípio definida apenas para x inteiro. Contudo, ela pode ser* estendida *a uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tenha a mesma* lei de formação*: $f(x) = x^2$. De outra forma, não há razão para que restrinjamos o domínio de f, uma vez que x^2 tem sentido para todo x real. Assim, o domínio maximal desta função é $\mathbb{R}$.*

Exemplo 7. *Considere $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, o conjunto dos números reais positivos. A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, pode ser estendida para um conjunto maior? E a função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$?*

Solução. Em ambos os casos, $\sqrt{x}$ aparece nas expressões que definem $f(x)$. Portanto, para que as imagens sejam números reais, *x não pode* ser negativo. Por isso não podemos incluir números reais negativos no domínio da função f ou da função g.

Como $f(0) = \sqrt{0} = 0 \in \mathbb{R}$, podemos incluir 0 no domínio da função f, ou seja, podemos estender a função para o conjunto $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ dos números reais não negativos.

No caso da função g, não podemos defini-la em 0 pela mesma fórmula, porque substituindo x por 0 em $\frac{1}{\sqrt{x}}$ anularia o denominador dessa fração. Assim, o domínio $\mathbb{R}_+^*$ de g

não pode ser estendido, ou seja, $\mathbb{R}_+^*$ é o domínio maximal da função g. $\square$

3 Imagem de uma função real

Nesta seção, iremos estudar a imagem de algumas funções reais de variável real que aparecem com frequência no estudo de funções.

3.1 Imagem da função afim

Se $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$ é chamada **função afim**. Vamos investigar as possíveis imagens de uma função afim.

Se $a = 0$, então a função f é dada por $f(x) = b$, ou seja, a função f é constante. Isso significa que b é o único número real y tal que $y = f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $\mathrm{Im}(f) = \{b\}$.

Se $a \neq 0$, vamos mostrar que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Para tanto, se $y_0 \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário, precisamos mostrar que é possível encontrar $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$. Para isso, basta resolvermos a equação $f(x) = y_0$, isto é,

$$ax + b = y_0.$$

Como $a \neq 0$, temos

$$ax + b = y_0 \Rightarrow ax = y_0 - b \Rightarrow x = \frac{y_0 - b}{a},$$

e esse valor para x_0 realmente funciona, pois, se $x = \frac{y_0 - b}{a}$, então

$$f(x_0) = a \cdot \frac{y_0 - b}{a} + b = y_0 - b + b = y_0.$$

Portanto

$$\boxed{\text{A imagem da função afim } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = ax + b \text{ é o conjunto unitário } \{b\}, \text{ se } a = 0, \text{ ou } \mathbb{R}, \text{ se } a \neq 0.}$$

Observação 8. *É interessante notar que, mesmo que a seja muito pequeno (próximo de zero) em módulo, se $a \neq 0$ a imagem da função cobre todo o conjunto $\mathbb{R}$.*

Exemplo 9. *Na Figura 1 vemos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0,01x + 2$. Embora esse gráfico pareça ser uma reta "quase" horizontal, tomando valores de x muito grandes tornamos o número $f(x)$ também muito grande. Por exemplo, para que seja $f(x) = 10^6$, basta tomarmos*

$$x = \frac{10^6 - 2}{0,01} = 10^8 - 200 = 99999800.$$

Na mesma figura, para comparação, aparece uma reta horizontal pontilhada, passando pelo ponto $(0, 2)$.

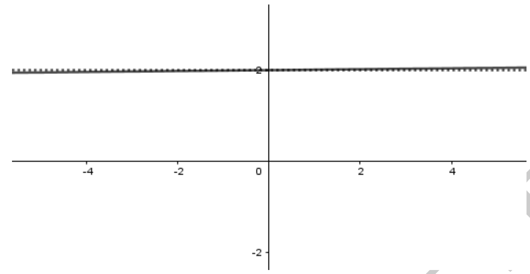

Figura 1: o gráfico da função dada por $f(x) = 0,01x + 2$ e a reta horizontal que passa pelo ponto $(0, 2)$.

3.2 Imagem da função recíproca

Consideremos, agora, a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Chamamos essa função de **função recíproca**. O número 0 não faz parte do domínio de f, pois o denominador em $1/x$ não pode se anular.

Se $y_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, então existe $x_0 = \frac{1}{y_0} \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $f(x_0) = y_0$. Realmente,

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1/y_0} = y_0.$$

Assim, todo número real diferente de zero pertence à imagem da função recíproca.

Por outro lado, se existisse $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $f(x_0) = 0$, então deveríamos ter $\frac{1}{x_0} = 0$, ou seja, $1 = x_0 \cdot 0 = 0$, o que não pode ocorrer. Isso significa que o número real 0 não faz parte da imagem de f. Portanto, a imagem da função recíproca é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

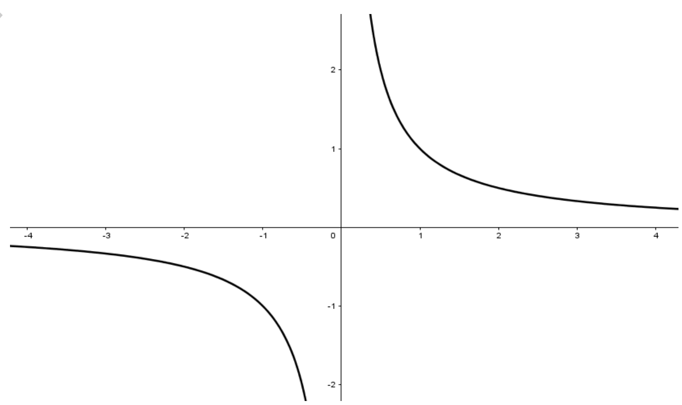

Figura 2: o gráfico da função recíproca, dada por $f(x) = 1/x$.

3.3 Imagem da função quadrática

Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são números reais dados, com $a \neq 0$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

é chamada **função quadrática**. A exigência $a \neq 0$ é evidente, pois, se $a = 0$, a função f passa a ser afim.

Como estamos supondo que $a \neq 0$, podemos escrever

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completando quadrados nessa última expressão, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

A última expressão acima, isto é,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \tag{2}$$

é conhecida como a **forma canônica** da função quadrática (1). A expressão $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamada **discriminante** da função quadrática f.

Como o quadrado de um número real não pode ser negativo, temos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Somando $-\frac{\Delta}{4a^2}$ a ambos os membros dessa desigualdade, segue que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3}$$

Para obtermos a forma canônica (2) de f, devemos multiplicar (3) por $a \neq 0$. Temos duas possíveis situações:

(a) Se $a > 0$, então

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \geq a \cdot \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

(b) Se $a < 0$, então

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \leq a \cdot \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Uma consequência inicial dos cálculos acima é que, se $a > 0$, então a imagem da função quadrática dada em (1) está contida no intervalo $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$. Também, se $a < 0$, então a imagem da função quadrática dada em (1) está contida no intervalo $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$. A seguir, mostraremos que a imagem de f é precisamente $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, se $a > 0$, e $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$, se $a < 0$.

Inicialmente, observamos que, se $a > 0$, então a função quadrática dada em (1) tem valor **mínimo** $\frac{-\Delta}{4a}$, o qual é atingido quando $x = -\frac{b}{2a}$. Por outro lado, se $a < 0$, a função quadrática dada em (1) tem um valor **máximo** $\frac{-\Delta}{4a}$, o qual é atingido quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Se $a > 0$ em (1) e $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > -\frac{\Delta}{4a}$, então,

$$4ay_0 + \Delta > 0. \tag{4}$$

De (2), segue que a equação

$$f(x) = y_0$$

é equivalente a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y_0}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{4ay_0 + \Delta}{4a^2}.$$

Como $4a^2$ é sempre positivo e, por (4), o numerador $4ay_0 + \Delta$ também é positivo, a fração $\frac{4ay_0+\Delta}{4a^2}$ é positiva, Então, a última igualdade acima equivale a

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{4ay_0 + \Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{4ay_0 + \Delta}}{2a}.$$

Assim, os números reais,

$$x_0 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ay_0 + \Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ay_0 + \Delta}}{2a}$$

são tais que $f(x_0) = f(x_1) = y_0$. Isso significa que, se $a > 0$, todo número real maior do que $-\frac{\Delta}{4a}$ pertence à imagem de f. Como $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, esse número também pertence à imagem de f.

A situação no caso em que $a < 0$ é análoga e a discussão acima se aplica quase que identicamente.

Tendo em vista o que fizemos até aqui, observamos que a figura abaixo ilustra, tipicamente, o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

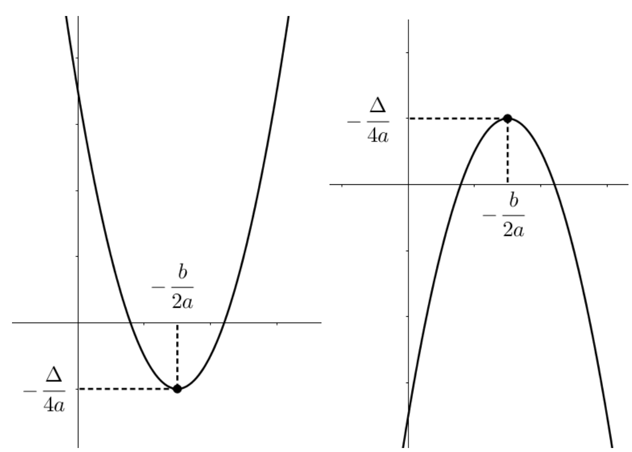

Figura 3: o gráfico da função quadrática, nos casos $a > 0$ (esquerda) e $a < 0$ (direita).

Resumindo, concluímos que a imagem de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é sempre um intervalo de $\mathbb{R}$. Mais precisamente:

(I) Se $a > 0$, a imagem da função quadrática dada em (1) é o intervalo $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.

(II) Se $a < 0$, a imagem da função quadrática dada em (1) é o intervalo $\left(-\infty, \frac{\Delta}{4a}\right]$.

Vamos concluir este material com uma interpretação geométrica para o discriminante de uma equação quadrática.

Exemplo 10. *Dentre todas as retas de equação* $x - y + c = 0$*, com* $c \in \mathbb{R}$*, encontre aquela(s) tangente(s) ao círculo* $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Solução. Escrevendo $y = x + c$ e substituindo esta expressão na equação do círculo, obtemos uma equação envolvendo apenas a incógnita x:

$$(x-2)^2 + (x+c-3)^2 = 1.$$

Desenvolvendo o primeiro membro, obtemos a equação quadrática

$$2x^2 + 2(c-5)x + (c-3)^2 + 3 = 0. \tag{5}$$

Evidentemente, essa equação depende do parâmetro c. Cada escolha de c corresponde a uma das retas do feixe de retas paralelas com equações $x - y + c = 0$, ou seja, a todas as retas têm uma só direção, mas têm posições variadas, as quais dependem do parâmetro c (três dessas retas encontram-se esboçadas na Figura 4). Queremos descobrir os possíveis valores de c para que a reta correspondente seja *tangente* ao círculo dado.

A caracterização de reta tangente a um círculo que nos interessa é a seguinte: na equação (5)

(1) se $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais, logo, a reta $x - y + c = 0$ não tem pontos em comum com o círculo (um exemplo típico é a reta ℓ da Figura 4).

(2) se $\Delta = 0$, a equação tem uma única solução real (com multiplicidade 2), logo, a reta $x - y + c = 0$ e o círculo têm exatamente um ponto em comum, ou seja, a reta é **tangente** ao círculo (uma de tais retas é a reta t da Figura 4).

(3) se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções reais, logo, a reta $x - y + c = 0$ e o círculo têm dois pontos em comum, e a reta é secante ao círculo (uma de tais retas é a reta m da Figura 4).

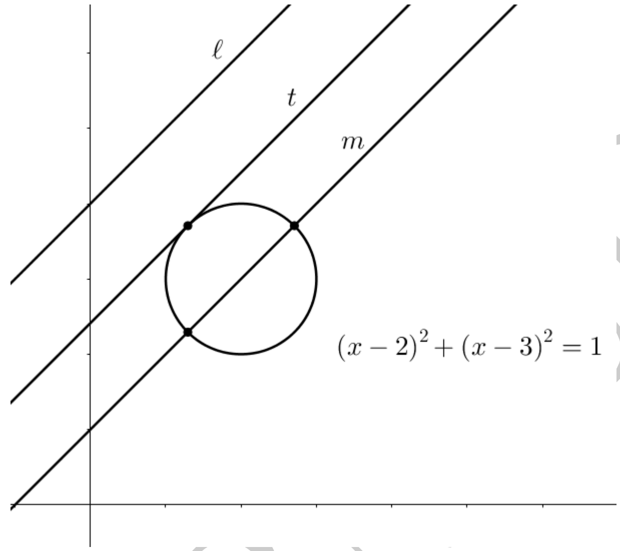

Figura 4: a reta t é tangente ao círculo.

Assim, a condição para que a reta seja tangente ao círculo é que o discriminante

$$\Delta = 4(c-5)^2 - 8((c-3)^2 + 3)$$

da equação (5) seja igual a zero. Temos, então, a equação

$$4(c-5)^2 - 8((c-3)^2 + 3) = 0$$

que, simplificada, é equivalente a

$$c^2 - 2c - 1 = 0.$$

Logo, $c = 1 - \sqrt{2}$ ou $c = 1 + \sqrt{2}$ são os valores de c que resolvem o problema. Voltando à equação $x - y + c = 0$, concluímos que as retas dessa forma e tangentes ao círculo são $x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ e $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$. $\square$

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em dois ou três encontros de 50 minutos cada.

É aconselhável que, mesmo que a turma já tenha certa experiência com funções, a aula sobre função do Módulo *Função - Noções Básicas*, do Nono Ano, seja revista, ou pelo menos consultada. Lá, você encontrará exemplos mais introdutórios e intuitivos de funções.

Você também pode explorar outras funções além das expostas aqui. Uma rápida olhada nas aulas sobre funções exponenciais a logarítmicas vai lhe dar informações importantes sobre o domínio e a imagem dessas funções.

Outro exemplo interessante é a função real de variável real f, dada por $f(x) = x^3$. Essa função é sobrejetiva, ou seja, a sua imagem é todo o conjunto dos números reais.

Uma inspeção no gráfico dessa função dá uma ideia intuitiva desse fato, mas uma demonstração rigorosa requer o uso de um teorema importante do Cálculo: o *Teorema do Valor Intermediário*. Faremos menção a esse problema em aulas futuras.

As sugestões de leitura a seguir contém mais material sobre funções, em nível de dificuldade variado.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.