Material Teórico - Módulo Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Relações Métricas em Triângulos Retângulos

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Relações métricas em triângulos retângulos

As fórmulas colecionadas na proposição a seguir são conhecidas como **relações métricas em triângulos retângulos** e são uma consequência dos casos de semelhança de triângulos vistos no material anterior. O item (c) é conhecido como o **Teorema de Pitágoras**.

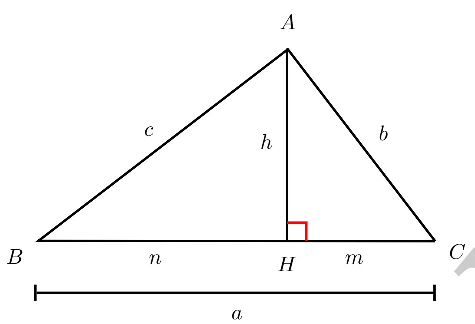
Proposição 1. *Seja ABC um triângulo retângulo em A, tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{AH} = h$, $\overline{CH} = m$ e $\overline{BH} = n$. Então:*

(a) $ah = bc$.

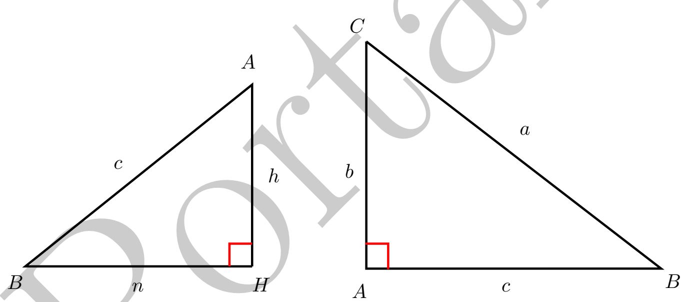
(b) $am = b^2$ *e* $an = c^2$.

(c) $a^2 = b^2 + c^2$.

(d) $mn = h^2$.



Demonstração. Uma vez que $A\widehat{H}B = C\widehat{A}B$ e $A\widehat{B}H = C\widehat{B}A$, as correspondências $A \leftrightarrow C$, $H \leftrightarrow A$ e $B \leftrightarrow B$ permitem concluir que os triângulos ABH e ABC são semelhantes, pelo caso de semelhança AA.



Daí obtemos as igualdades:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \quad \text{e} \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{n},$$

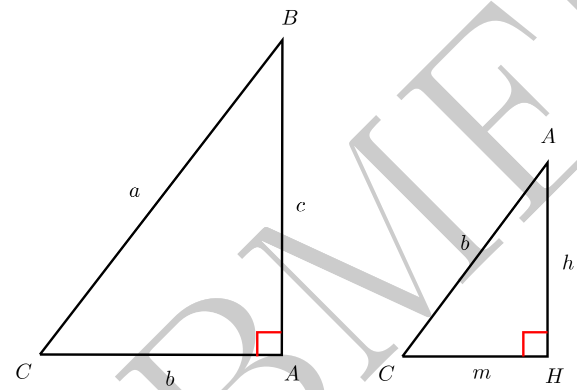
que por sua vez fornecem as relações:

$$ah = bc \;\; \text{e} \;\; c^2 = an.$$

De forma análoga ao argumento acima, as igualdades

$$A\widehat{H}C = B\widehat{A}C \;\; \text{e} \;\; A\widehat{C}H = B\widehat{C}A$$

fornecem, mediante as correspondências $H \leftrightarrow A$, $A \leftrightarrow B$ e $C \leftrightarrow C$, a semelhança entre os triângulos HAC e ABC (também pelo caso AA).



A partir de tal semelhança, obtemos a igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

ou, o que é o mesmo,

$$b^2 = am.$$

Assim, concluímos a prova dos itens (a) e (b).

Para provarmos (c), somamos as equações em (b) membro a membro, obtendo:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a \cdot a = a^2.$$

Finalmente, multiplicando as equações em (b) membro a membro e utilizando a relação dada no item (a), obtemos:

$$am \cdot an = b^2c^2 = (bc)^2 = (ah)^2 = a^2h^2.$$

Então,

$$a^2mn = a^2h^2$$

e, cancelando a^2 de ambos os lados dessa última igualdade, concluímos a prova do item (d). □

2 Aplicações

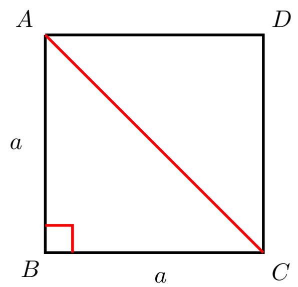
No restante desse material, apresentamos várias aplicações da proposição anterior, tanto no sentido de exercitar as fórmulas nela contidas quanto no de ampliar nossa compreensão delas e deduzir outros resultados importantes.

Comecemos com dois exemplos simples, cujos resultados o leitor deve guardar para referência futura.

Exemplo 2. *Se $ABCD$ é um quadrado de lado $AB = a$, então a medida das suas diagonais é igual a $a\sqrt{2}$.*

Solução. Veja que o triângulo ABC é retângulo em B e os seus catetos ambos medem a. Aplicando o Teorema de Pitágoras a esse triângulo, obtemos:

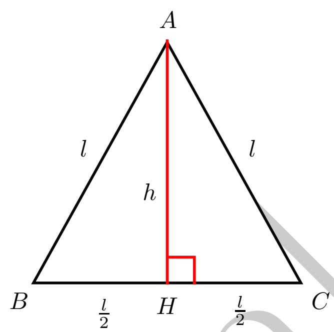
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &\Longrightarrow \overline{AC}^2 = a^2 + a^2\\ &\Longrightarrow \overline{AC}^2 = 2a^2\\ &\Longrightarrow \overline{AC} = a\sqrt{2}.\end{aligned}$$



□

Exemplo 3. *A altura de um triângulo equilátero de lado l mede $\frac{l\sqrt{3}}{2}$.*

Solução. Sejam ABC um triângulo equilátero de lado l e H o pé da altura baixada do vértice A ao lado BC (veja a figura abaixo).

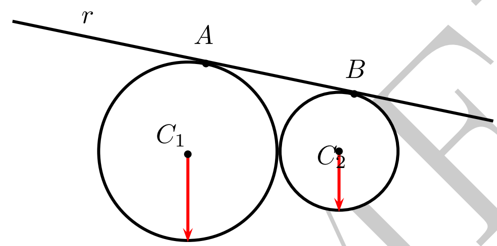


Recorde que o caso CH (cateto-hipotenusa) de congruência de triângulos retângulos garante a congruência dos triângulos ABH e ACH (realmente, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e AH é cateto de ambos). Portanto, $\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{l}{2}$. Agora, como o triângulo AHC é retângulo em H, aplicando a ele o Teorema de Pitágoras, obtemos:

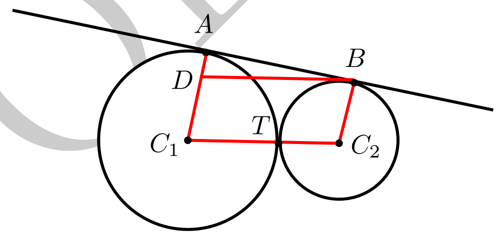
$$\begin{aligned}\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 = \overline{AC}^2 &\Longrightarrow \overline{AH}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2\\ &\Longrightarrow \overline{AH}^2 + \frac{l^2}{4} = l^2\\ &\Longrightarrow \overline{AH}^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}\\ &\Longrightarrow \overline{AH}^2 = \frac{3l^2}{4}\\ &\Longrightarrow \overline{AH} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Na figura abaixo, os círculos são tangentes e a reta r é tangente a ambos, nos pontos A e B. Sabendo que os raios dos círculos têm medidas iguais a $2cm$ e $3cm$, calcule a medida do segmento AB.*



Solução. Traçamos por B uma reta paralela à reta que que contém os pontos C_1 e C_2, a qual intersecta o raio AC_1 no ponto D (veja a figura abaixo).



Afirmamos que o quadrilátero BDC_1C_2 é um paralelogramo. Com efeito, BD e C_1C_2 são paralelos por construção e, além disso, DC_1 e BC_2 também são paralelos, pois são ambos perpendiculares à reta r. Portanto, os lados opostos de BDC_1C_2 são congruentes, de sorte que obtemos (omitindo a unidade de medida):

$$\begin{aligned}\overline{AD} + \overline{DC_1} = 3 &\Longrightarrow \overline{AD} + \overline{BC_2} = 3\\ &\Longrightarrow \overline{AD} + 2 = 3\\ &\Longrightarrow \overline{AD} = 1\end{aligned}$$

e

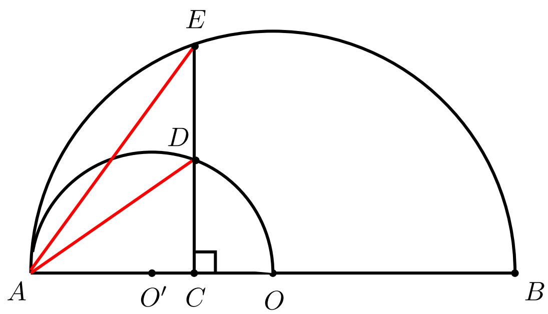
$$\overline{BD} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_1T} + \overline{TC_2} = 3 + 2 = 5.$$

Agora, observe que o ângulo $\angle BAD$ é reto. Logo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABD para obter:

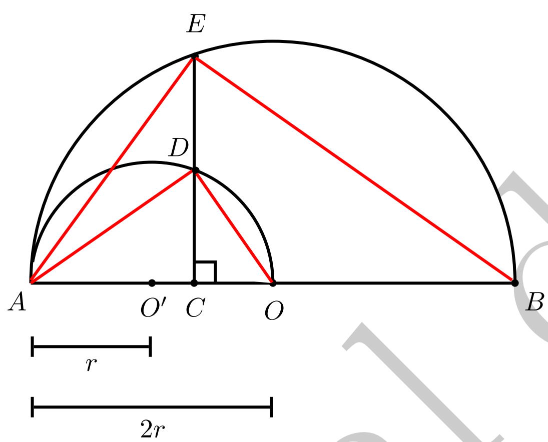
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 &\Longrightarrow \overline{AB}^2 + 1^2 = 5^2\\ &\Longrightarrow \overline{AB}^2 = 25 - 1 = 24\\ &\Longrightarrow \overline{AB} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Na figura abaixo, os dois semicírculos são tangentes no ponto A, O é o centro do semicírculo maior e O' é o centro do menor. Sabe-se ainda que a medida do segmento AD é igual a $7\sqrt{2}$cm. Calcule a medida do segmento AE.*



Solução. Denotando por r o raio do semicírculo menor, temos que o raio do maior é igual a $2r$. Além disso, os triângulos AOD e ABE são retângulos em D e E, respectivamente, pois estão inscritos em semicírculos (veja a figura abaixo).



Portanto, aplicando o item (b) da Proposição 1 a esses dois triângulos obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 = \overline{AO}\cdot\overline{AC} &\Longrightarrow \left(7\sqrt{2}\right)^2 = 2r\cdot\overline{AC}\\ &\Longrightarrow 98 = 2r\cdot\overline{AC}\\ &\Longrightarrow 49 = r\cdot\overline{AC}\end{aligned}$$

e

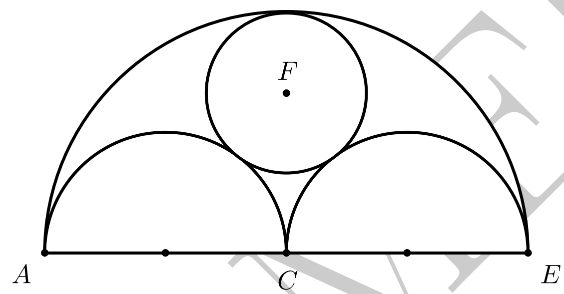
$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AC} \Longrightarrow \frac{\overline{AE}^2}{4} = r\cdot\overline{AC}.$$

Comparando as duas igualdades acima, segue que

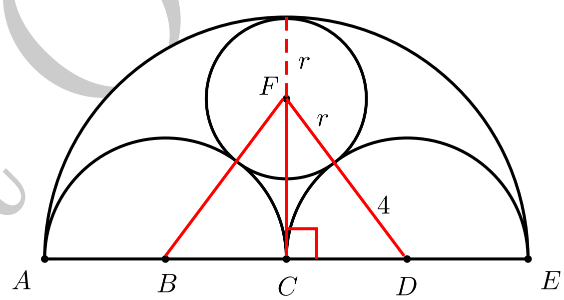
$$\begin{aligned}\frac{\overline{AE}^2}{4} = 49 &\Longrightarrow \overline{AE}^2 = 4\cdot 49\\ &\Longrightarrow \overline{AE} = 2\cdot 7 = 14.\end{aligned}$$

□

Exemplo 6. *Na figura abaixo, os pontos A, C e E são colineares, sendo C o ponto médio de A. Os três semicírculos desenhados têm diâmetros AC, CE e AE, ao passo que o círculo centrado em F é tangente a todos eles. Sabendo que a medida do raio do semicírculo maior é 8cm, calcule a medida do raio do círculo.*



Solução. Inicialmente, note que como $\overline{AC} = \overline{EC}$, o semicírculo maior é centrado em C. Daí, $\overline{AC} = \overline{EC} = 8$. Sendo B e D os centros dos semicírculos menores (veja a figura abaixo), temos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 4$.



Denotemos por r o raio do círculo centrado em F, a condição de tangência com os semicírculos menores garante que $\overline{BF} = \overline{DF} = r + 4$. Por outro lado, a condição de tangência do círculo com o semicírculo maior garante $\overline{CF} = 8 - r$ (veja novamente a figura acima).

Agora, uma vez que o triângulo BDF é isósceles de base BD e C é o ponto médio de BD, temos (por um argumento análogo ao esboçado na solução do Exemplo 3) que CF também é altura de BDF.

De outra forma, o triângulo CDF é retângulo em C e, aplicando o Teorema de Pitágoras ao mesmo, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{CF}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 &\Longrightarrow (8-r)^2 + 4^2 = (r+4)^2\\ &\Longrightarrow 64 - 16r + \cancel{r^2} + \cancel{16} =\\ &\quad = \cancel{r^2} + 8r + \cancel{16}\\ &\Longrightarrow 8r + 16r = 64\\ &\Longrightarrow 24r = 64\\ &\Longrightarrow r = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

□

O próximo exemplo é importante e também deve ser guardado. Ele estabelece a *recíproca do Teorema de Pitágoras.*

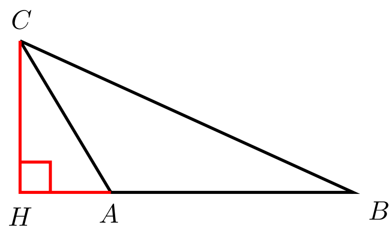
Exemplo 7 (Recíproca do Teorema de Pitágoras)**.** *Seja ABC um triângulo cujos lados medem $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = B$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então ABC é retângulo em A.*

Solução. Seja H o pé da altura baixada ao lado AB, isto é, o pé da perpendicular baixada do vértice C à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Queremos mostrar que $H = A$, pois isso acarretará que

$$C\widehat{A}B = C\widehat{H}B = 90°.$$

Suponha que seja $H \neq A$. Há três casos a considerar:

(a) A está no interior do segmento HB (veja a figura abaixo):

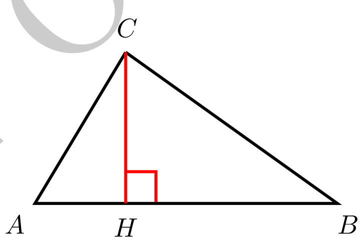


Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos HBC e HAC, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 \\ &> \overline{CH}^2 + (\overline{HA} + \overline{AB})^2 \\ &= \overline{CH}^2 + (\overline{HA} + c)^2 \\ &= \overline{CH}^2 + \overline{HA}^2 + 2\overline{HA} \cdot c + c^2 \\ &= \overline{AC}^2 + 2\overline{HA} \cdot c + c^2 \\ &= b^2 + 2\overline{HA} \cdot c + c^2 \\ &> b^2 + c^2 = a^2. \end{aligned}$$

Isso é uma contradição, mostrando que esse caso não pode ocorrer.

(b) H pertence ao interior do segmento AB (veja a figura a seguir):

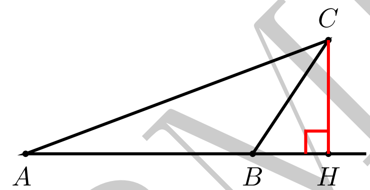


Usando que $\overline{AC} > \overline{CH}$, $\overline{AB} > \overline{BH}$ e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BHC, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \\ &> \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2 \\ &= \overline{BC}^2 = a^2, \end{aligned}$$

novamente uma contradição.

(c) B pertence ao segmento AH (veja a figura):



Nesse caso, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BCH, usando que $\overline{BH} < \overline{AH}$ e aplicando o Teorema de Pitágoras a ACH, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2 \\ &< \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 \\ &= b^2 < b^2 + c^2 = a^2. \end{aligned}$$

Mais uma vez, chegamos a uma contradição. ☐

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadam duas sessões de 50min cada para discutir o conteúdo presente nesse material, sendo uma dessas sessões utilizada para apresentar as relações contidas na Proposição 1 e outra sessão para apresentar os exemplos. Ao expor cada exemplo, chame a atenção dos alunos para o momento onde as relações métricas estão sendo utilizadas. A utilização de material feito com cartolina, madeira, etc., ou *softwares* geométricos podem auxiliar na compreensão do Teorema de Pitágoras.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*, 9ª Edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.