Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 1

Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano - parte 1

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática OBMEP

1 Coordenadas no plano

Vamos começar considerando uma reta r e escolhendo sobre ela dois pontos: um ponto O e um ponto $U \neq O$. Vamos associar ao ponto O o número 0 e ao ponto U o número 1. Feitas essas associações, dizemos que a reta r passa a ter uma **orientação**. Chamamos a reta r, com os pontos O e U escolhidos e fixados, uma **reta orientada**. O ponto O é chamado **origem** da reta orientada r.

Uma vez que o ponto O particiona a reta r em duas semirretas, concluímos que há duas maneiras de orientar a reta r, e que tais maneiras correspondem a escolhermos o ponto U em uma ou outra dessas semirretas. Entretanto, uma vez escolhido o ponto U (i.e., uma vez fixada uma orientação para r), diremos que tal orientação é **positiva**, e que a orientação contrária (i.e., aquela que teríamos, caso tivéssemos escolhido U na semirreta oposta) é **negativa**.

Suponha que desenhamos a reta r como uma reta *horizontal*. Então, convencionamos (veja a figura 1) que a orientação positiva corresponde a escolhermos U à direita de O, ao passo que a orientação negativa corresponde a escolhermos U à esquerda de O. Em geral, neste texto, consideraremos apenas eixos orientados positivamente.

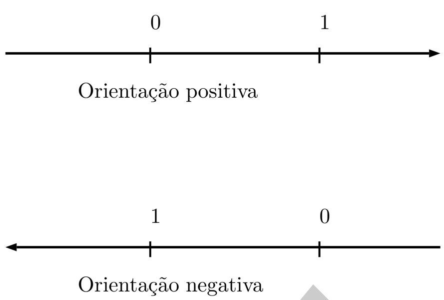

Figura 1: possíveis orientações de um eixo.

A escolha de O e U também estabelece uma **escala** na reta r, uma vez que o segmento OU tem, por definição, comprimento 1. Há, pois, uma infinidade de escolhas possíveis para uma escala em r, dependendo das posições dos pontos O e U.

Entretanto, uma vez fixada uma escala, i.e., uma vez fixada uma escolha para os pontos O e U, podemos marcar facilmente os pontos correspondentes aos números inteiros, sendo os inteiros positivos marcados à direita de O, enquanto aqueles negativos à esquerda de O. Uma vez feito isso, marcamos (também facilmente) os pontos correspondentes aos números da forma $\frac{m}{2}$, com m inteiro, aqueles correspondentes aos números da forma $\frac{m}{3}$, com m inteiro, e assim por diante.

Esse procedimento marca sobre r os pontos correspondentes a todos os números *racionais*, o que torna bastante natural nos perguntarmos sobre se é possível marcar os pontos correspondentes a todos os números *irracionais*. Nesse sentido, temos o seguinte fato, que será assumido sem demonstração (para provarmos rigorosamente a afirmação a seguir, precisaríamos de uma definição rigorosa de número real, assunto que escapa aos nossos objetivos):

> A cada ponto P de uma reta orientada corresponde um único número real x.

Por outro lado, nas notações do retângulo destacado acima, o número x é chamado **coordenada** do ponto P.

A correspondência entre números reais e pontos de uma reta orientada, garantida pela afirmação acima, nos permite identificar cada ponto da reta com sua coordenada. Assim, podemos falar diretamente em *ponto x*, em vez de *ponto P com coordenada x*. Por exemplo, podemos nos referir aos pontos O e U simplesmente como o ponto 0 e ponto 1. A reta orientada r é, então, chamada **reta real**, **reta numérica** ou **eixo** (**orientado**).

Vamos, agora, estabelecer coordenadas em um plano. Para isso, consideremos a seguinte configuração: sejam r e s duas retas *perpendiculares*, concorrentes em um ponto O (veja a figura 2). Geralmente escolhemos r como sendo uma reta horizontal, o que força s a ser uma reta vertical.

Escolhendo pontos $U \in r$ e $V \in s$, ambos diferentes de O, as retas r e s passam a ser eixos, conforme a definição dada acima.

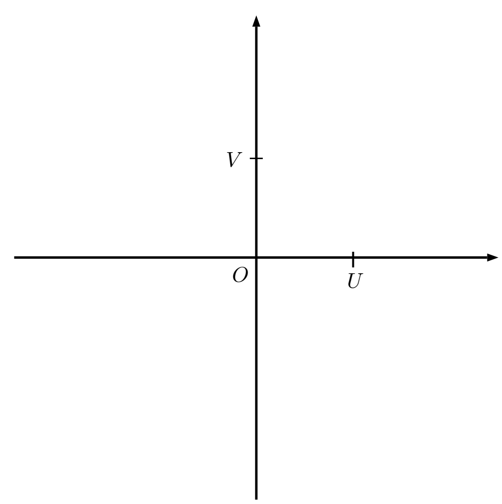

Figura 2: eixos perpendiculares com mesma origem.

Salvo menção em contrário, convencionamos escolher U e V como na figura 2, ou seja, U à direita de O e V acima de O. (Mais adiante veremos que, além dessa escolha, há essencialmente apenas mais uma escolha possível.) É também uma questão de convenção considerarmos $\overline{OU} = \overline{OV}$, o que significa simplesmente que adotamos uma mesma escala sobre os eixos r e s. Também salvo menção em contrário, sempre faremos isso neste texto, embora em alguns casos seja conveniente a escolha de escalas diferentes nos dois eixos.

Um plano no qual foram escolhidos e fixados dois eixos perpendiculares, como descrito acima, é chamado **plano cartesiano**.

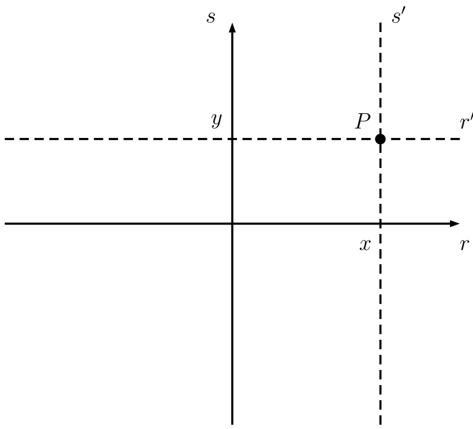

Figura 3: coordenadas cartesianas de um ponto no plano.

Dado um ponto P em um plano cartesiano (veja a figura 3), sejam r' e s' as retas passando por P e paralelas a r e s, respectivamente. Seja x o ponto (identificado com sua coordenada) sobre o eixo r, obtido como a interseção de s' com r, e seja y o ponto (também identificado com sua coordenada) sobre o eixo s, obtido como a interseção de r' com s. Os números reais x e y são chamados **coordenadas cartesianas** do ponto P. O número x é chamado **abscissa** de P e o número y é chamado **ordenada** de P. Essa construção pode ser *parcialmente* resumida na seguinte propriedade:

A cada ponto P de um plano cartesiano corresponde um único par ordenado (x, y) de números reais, onde x é a abscissa de P e y é a ordenada de P.

O que ficou faltando justificarmos é porque esse par ordenado (x, y) correspondente ao ponto P é *único*. Para tal, basta mostrarmos como é possível recuperar o ponto P a partir de suas coordenadas.

Suponha, então, que conhecemos as coordenadas (x, y) de P. Pelo axioma das paralelas, existe uma única reta paralela a s e passando por x. A unicidade dessa reta paralela implica (nas notações da figura 3) que ela é, necessariamente, a reta s'. De modo análogo, a reta r' é a única reta que passa por y e é paralela a r. O ponto P é, pois, recuperado a partir de x e y como sendo a interseção das retas r' e s'. Isso mostra que o processo que usamos para obter x e y a partir de P pode ser revertido, de sorte que a correspondência entre P e o par ordenado (x, y) é **biunívoca**.

A partir daqui, identificaremos um ponto P como o par ordenado (x, y) de suas coordenadas. Então, escreveremos *ponto* (x, y) em vez de *ponto correspondente ao par ordenado* (x, y). A identificação entre ponto e par ordenado permite descrever conjuntos de pontos no plano algebricamente. Quando for conveniente, escreveremos $P = (x, y)$.

Observe que, dados dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, temos

$$A = B \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

Exemplo 1. *O* **eixo das abscissas** *é, por definição, o conjunto* $Ox = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *(i.e., o eixo horizontal). O* **eixo das ordenadas** *é, também por definição, o conjunto* $Oy = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ *(i.e., o eixo vertical).*

O eixo das abscissas determina dois semiplanos: o **semiplano superior** $X_+ = \{(x, y) \mid y > 0\}$ *e o* **semiplano inferior** $X_- = \{(x, y) \mid y < 0\}$*. Da mesma forma, o eixo das ordenadas determina o* **semiplano à direita** $Y_+ = \{(x, y) \mid x > 0\}$ *e o* **semiplano à esquerda** $Y_- = \{(x, y) \mid x < 0\}$*.*

Os pontos (x, y) do plano cartesiano que não pertencem a um eixo são tais que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Temos, assim, quatro possibilidades (veja a figura 4):

- se $x > 0$ e $y > 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao **primeiro quadrante**.
- se $x < 0$ e $y > 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao **segundo quadrante**.
- se $x < 0$ e $y < 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao **terceiro quadrante**.
- se $x > 0$ e $y < 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao **quarto quadrante**.

Usando a notação que estabelecemos acima, o primeiro quadrante é a interseção $X_+ \cap Y_+$, o segundo quadrante é a interseção $X_- \cap Y_+$, o terceiro é $X_- \cap Y_-$ e o quarto quadrante é $Y_- \cap X_+$. Por uma questão de simplicidade, escreveremos $++$, $-+$, $--$ e $+-$ para denotar, respectivamente, o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto quadrantes.

Vimos anteriormente que uma reta pode ser orientada de duas maneiras, e orientar uma reta significa, essencialmente, estabelecer o que é o *sentido positivo de percurso*.

Da mesma forma, há apenas duas maneiras de orientar o plano, e a orientá-lo positivamente significa, essencialmente, estabelecer qual o sentido positivo de *rotação*. Mais precisamente, *orientar um plano* significa escolher um sentido de rotação para passarmos do primeiro para

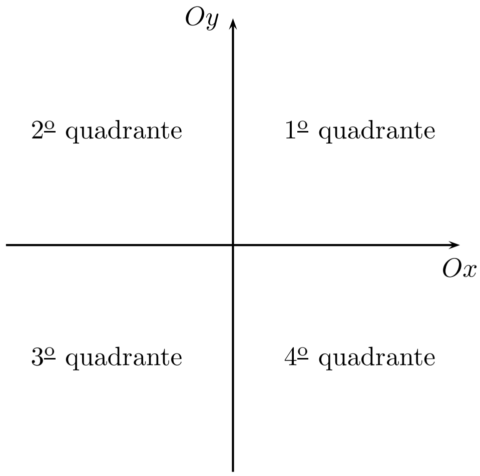

Figura 4: quadrantes do plano cartesiano.

o segundo quadrante, depois para o terceiro, depois para o quarto quadrante, voltando em seguida para o ponto de partida, novamente no primeiro quadrante. Evidentemente, tal rotação será *anti-horária* ou *horária*, confirmando o fato de que só há duas orientações possíveis.

Duas orientações de um plano são **equivalentes** se uma puder ser obtida a partir da outra por uma rotação.

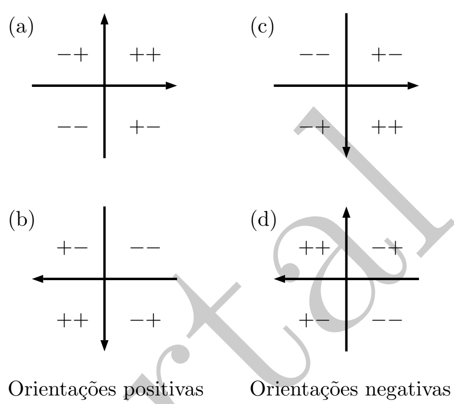

Figura 5: possíveis combinações de eixos.

Na figura 5, as orientações (a) e (b) são equivalentes. Nelas, o percurso $++, -+, --, +-$, do primeiro ao quarto quadrante, é feito no sentido anti-horário. As orientações (c) e (d) também são equivalentes, mas nelas o percurso do primeiro ao quarto quadrante é feito no sentido horário. Mas a orientação (a) não é equivalente à orientação (c) nem à orientação (d). A orientação (b) também não é equivalente à orientação (c) nem à orientação (d), porque os sentidos de percurso do primeiro ao quarto quadrante nessas orientações são distintos.

Daqui em diante, *convencionamos* chamar a orientação dos itens (a) e (b) de **positiva**, e a orientação dos itens (c) e (d) de **negativa**.

Uma mudança de orientação de um plano cartesiano resulta de uma transformação do plano chamada *reflexão*. Intuitivamente, podemos dizer que, se você colocar o plano cartesiano da figura 5 (a) em frente a um espelho, a sua imagem será equivalente ao plano da figura 5 (d).

Exemplo 2. *Em um plano cartesiano, os pontos* $(1, 2)$, $(-1, 3)$, $(-2, -4)$ *e* $(3, -2)$ *são vértices de um quadrilátero. Seguindo a ordem*

$$(1, 2) \to (-1, 3) \to (-2, -4) \to (3, -2) \to (1, 2)$$

esse quadrilátero é percorrido uma vez no sentido anti-horário. Pergunta-se: a orientação desse plano cartesiano é positiva ou negativa?

Solução. Cada vértice do quadrilátero dado está em um dos quadrantes do plano cartesiano. A ordem em que os vértices são percorridos pode ser interpretada como a ordem em que os quadrantes são percorridos, isto é, o circuito de quadrantes $++, -+, --, +-$ é percorrido no sentido anti-horário. Isso significa que a orientação do plano cartesiano é negativa. □

2 Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Um plano cartesiano é **positivamente** (resp. **negativamente**) **orientado** se sua orientação for a que convencionamos chamar de *positiva* (resp. *negativa*.

Dados pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ em um plano cartesiano positivamente orientado, queremos encontrar um modo de calcular a distância entre esses pontos. A maneira mais imediata de fazer isso é calcular o comprimento do segmento de reta que liga esses dois pontos (veja a figura 6).

Para tanto, observe que o segmento de reta que liga os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância d entre esses pontos é, então, dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

(Note que não é necessário escrever os módulos sob a raiz quadrada pois os comprimentos dos catetos são elevados ao quadrado.)

A distância entre pontos no plano cartesiano tem as seguintes propriedades:

(1) $d(A, B) \geq 0$, para quaisquer pontos A e B.

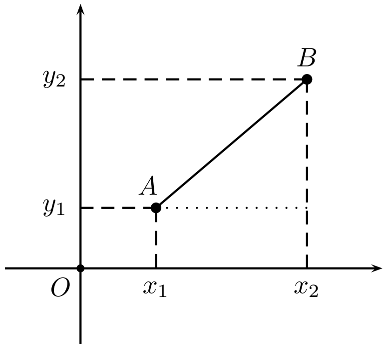

Figura 6: distância entre dois pontos de um plano cartesiano.

(2) $d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$.

(3) $d(A, B) = d(B, A)$, para quaisquer pontos A e B do plano cartesiano.

(4) **Desigualdade triangular:**

$$d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B),$$

para quaisquer pontos A, B e C do plano cartesiano (veja a figura 7). A igualdade ocorre se, e somente se, os pontos A, B e C são colineares e o ponto C está situado entre os pontos A e B.

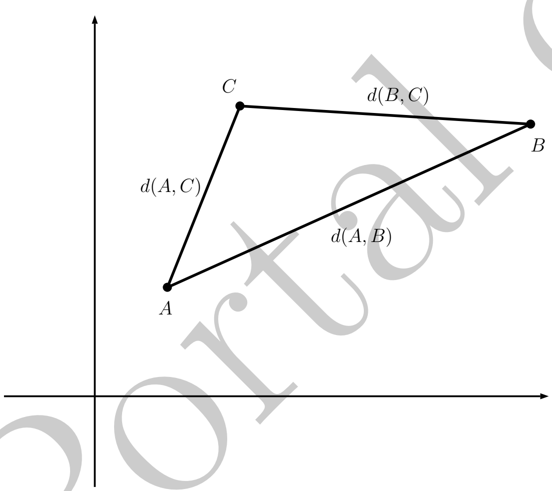

Figura 7: a desigualdade triangular.

De fato, observe inicialmente que, como uma soma de quadrados de números reais é sempre maior ou igual a zero, a raiz quadrada $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ está bem definida e é um número real não negativo.

Se $A = B$, então $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e, daí,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2} = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $d(A, B) = 0$, então

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0,$$

o que implica $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0$. Como uma soma de quadrados é zero somente se cada parcela é igual a zero, segue da última igualdade que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, logo, $A = B$. Isso prova o itens (1) e (2).

Para provarmos o item (4), basta percebermos que

$$\begin{aligned} d(B, A) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= d(A, B). \end{aligned}$$

Para o item (4), daremos apenas uma justificativa geométrica (i.e., não apresentaremos argumentos algébricos que justifiquem a validade da desigualdade do item (4) em coordenadas). Para tanto, observe que, na figura 7, o caminho mais curto para se ir de A até B é ao longo do segmento de reta AB, com comprimento $d(A, B)$. Uma vez que o caminho poligonal ACB tem comprimento $d(A, C) + d(C, B)$, devemos então ter

$$d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B).$$

Ademais, os dois caminhos têm o mesmo comprimento se, e somente se, o caminho poligonal confundir-se com o segmento AB, o que ocorre se, e só se, os pontos A, B e C forem colineares e C estiver entre A e B.

Além de justificar geometricamente a desigualdade (4), a figura 7 também justifica o nome *desigualdade triangular*. Na parte 2 desta aula, provaremos essa desigualdade usando um método algébrico.

As propriedades (1), (2), (3) e (4) são condições que *caracterizam* a noção de distância, ou seja, se d é uma função que associa a cada par de pontos A e B do plano um número real $d(A, B)$ satisfazendo as condições (1), (2), (3) e (4), então d pode ser usada para medir a distância entre os pontos A e B, num sentido específico que pode não ser o *euclidiano* (i.e., pode não ser aquele ao qual estamos acostumados). Vejamos um exemplo.

Exemplo 3. *Imagine que você é um taxista dirigindo em uma grande cidade, cujas ruas e avenidas formam um quadriculado e, vistas no mapa, são sempre horizontais ou verticais. Seu táxi pode circular livremente pelas vias da cidade, mas não pode atravessar as casas e prédios, de modo que o movimento do táxi só pode ser feito, em relação ao mapa, na horizontal ou na vertical. Para simplificar, imagine também que todas as ruas e avenidas da cidade são de* mão dupla*, i.e., podem ser percorridas em ambos os sentidos.*

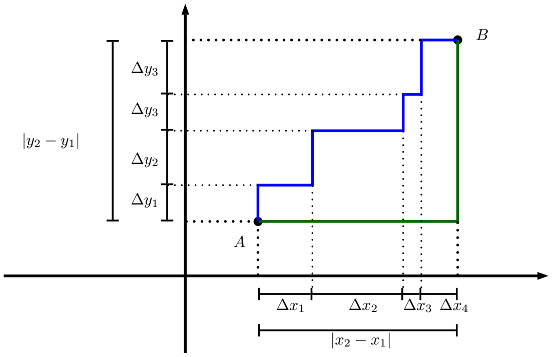

Figura 8: dois possíveis caminhos do táxi.

Podemos ver o mapa dessa cidade como um plano cartesiano. Suponha que um passageiro subiu no táxi no ponto $A = (x_1, y_1)$ e deseja ir até o ponto $B = (x_2, y_2)$. Qual a mínima distância possível que o táxi irá percorrer?

Existem vários caminhos possíveis. O taxista pode optar, por exemplo, por um dos dois caminhos destacados na figura 8. Entretanto, em um qualquer dos caminhos possíveis, o comprimento total mínimo do caminho do táxi será a soma dos deslocamentos na horizontal e dos deslocamentos na vertical.

Na figura 8, temos $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = |x_2 - x_1|$ e $\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4 = |y_2 - y_1|$. Em geral, independentemente do caminho mínimo escolhido, a soma dos deslocamentos horizontais é $|x_2 - x_1|$ e a soma dos deslocamentos verticais é $|y_2 - y_1|$. Assim, a distância mínima possível percorrida pelo táxi entre os pontos A e B é dada por

$$d_T(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

independentemente da escolha do caminho mínimo que liga A a B.

Portanto, para o taxista, a noção mais adequada de distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é a dada pela fórmula acima, e não aquela dada pela fórmula (1), página 3.

Nas notações do exemplo anterior, observamos que a distância d_T tem as mesmas propriedades (1), (2), (3) e (4), satisfeitas pela distância usual d.

Realmente, como $d_T(A, B)$ é uma soma de valores absolutos, ela é necessariamente um número real não negativo. Se $d_T(A, B) = 0$, então $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 0$, o que implica $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, logo $A = B$.

É também claro que $d_T(A, B) = d_T(B, A)$, pois $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ e $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$.

Finalmente, se $C = (x_3, y_3)$, então

$$\begin{aligned}
d_T(A, B) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\
&= |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| \\
&\quad + |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \\
&\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\
&= |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| \\
&= d_T(A, C) + d_T(C, B).
\end{aligned}$$

Assim, (4) segue.

Observamos ainda que, se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, então

$$d_M(A, B) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\},$$

o maior dos números $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$, também satisfaz as condições (1), (2), (3) e (4). Logo, $d_M(A, B)$ mede uma "distância" entre os pontos A e B. Deixamos a cargo do leitor a verificação de que d_M realmente satisfaz (1),(2) e (3), bem como a interpretação geométrica dessa distância.

3 Comentários sobre a origem da Geometria Analítica

As ideias estudadas nesta aula nasceram do trabalho de dois matemáticos franceses: René Descartes du Perron (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Descartes é universalmente reconhecido como pai da Geometria Analítica, tanto que o nome *plano cartesiano* vem de *Cartesius* que é a forma latinizada do nome Descartes. Isso se deve em grande parte ao fato de Descartes ter publicado, em 1637, como um dos apêndices o seu influente e famoso *Discurso do Método*, um pequeno tratado chamado *La géométrie* (*A geometria*), onde expõe as ideias fundamentais da Geometria Analítica.

Em contrapartida, apesar de Fermat ter o seu nome ligado apenas acidentalmente à origem da Geometria Analítica, a ele cabe a prioridade na descoberta desse método, como pode ser constatado em uma carta escrita a Roberval, datada de setembro de 1636, onde ele explica como funciona seu método, muito parecido com o de Descartes, e afirma serem essas suas ideias anteriores a 1630. Depois de sua morte foi publicado um trabalho seu, em latim, chamado *Isogoge ad locus planos et solidos*, onde ele discute as equações da reta, do círculo, de elipses, parábolas e hipérboles.

Em linhas gerais, pode-se dizer que Descartes e Fermat adotam abordagens inversas: enquanto Descartes começa com um lugar geométrico e obtém uma equação, Fermat começa com uma equação e obtém um lugar geométrico.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

A noção de plano cartesiano é central para boa parte da Matemática. A ideia de representar um objeto geométrico por um número ou por um par ordenado de números nos permite transferir problemas geométricos para o universo algébrico, onde podem ser resolvidos sistematicamente. Ela também nos permite interpretar problemas algébricos geometricamente, colocando a intuição geométrica a serviço da álgebra. Essa "ponte" entre dois mundos possibilitou o surgimento de boa parte da matemática que podemos chamar de *avançada*.

É interessante que o aluno esteja ciente de que a geometria analítica é um *método* e que sua essência é a passagem da geometria para álgebra e o retorno da álgebra para a geometria, por intermédio da noção de plano cartesiano.

Uma discussão sobre coordenadas cartesianas pode ser encontrada na sugestão de leitura complementar [1]. No capítulo 1 da sugestão de leitura complementar [2], pode-se encontrar uma discussão elementar da correspondência entre números reais e pontos de um eixo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.