

# Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

## Continuidade em um Ponto - Parte I

### Tópicos Adicionais

**Autor: Tiago Caúla Ribeiro**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**12 de Novembro de 2022**



**PORTAL DA  
MATEMÁTICA**  
OBMEP

A fim de tratar adequadamente o conceito de função contínua, começaremos estudando, neste material, algumas propriedades mais finas do conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais.

## 1 Introdução

*Um número real é o resultado da medida de uma grandeza.*

A “definição” acima confere ao conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais o status de *modelo numérico para medir*. Ao mesmo tempo, cabe perguntar o motivo pelo qual  $\mathbb{Q}$ , o conjunto dos números racionais, não é um modelo adequado para medir grandezas. Afinal de contas,

*sempre que utilizamos um instrumento para medir uma grandeza <sup>1</sup>, o resultado é um número racional.*

Antes de tudo, é necessário esclarecer os sentidos da palavra “medir” nas frases acima: na primeira, temos o sentido literal (cf. [4], Cap. I); na segunda, “medir” significa “aproximar”.

Desse modo, vejamos um exemplo clássico de um segmento cuja medida não pode ser expressa por um número racional.

**Exemplo 1.** *A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários é um número irracional.*

**Solução.** De fato, se  $x$  é o comprimento da hipotenusa, vale  $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ , pelo Teorema de Pitágoras. Se  $x$  fosse um número racional, digamos  $x = p/q$ , com  $p$  e  $q$  inteiros positivos, teríamos  $p^2 = 2q^2$ . Mas há um número par de fatores iguais a 2 em  $p^2$ , ao passo que há um número ímpar de fatores iguais a 2 em  $2q^2$ , contradizendo a unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos.  $\square$

Muito embora  $\mathbb{Q}$  não sirva para medir, podemos aproximar a medida de uma grandeza por números racionais com o grau de precisão que desejarmos. Mais precisamente, dados um número real  $a$  e uma estimativa de erro  $\varepsilon > 0$ , arbitrários,

---

<sup>1</sup>Por exemplo, uma régua para medir comprimentos.

existe um número racional  $r$  satisfazendo  $|a - r| < \varepsilon$  (o erro absoluto  $|a - r|$ , cometido ao aproximar  $a$  por  $r$ , é menor que a estimativa  $\varepsilon$  prescrita). Para demonstrar esse resultado, vamos enunciar uma importante propriedade do conjunto dos números reais:

**Propriedade arquimediana** - *Se  $x$  e  $y$  são números reais positivos, existe um número natural  $n$  tal que  $nx > y$ .*

Em termos geométricos, a propriedade arquimediana prevê o seguinte: dados dois segmentos  $AB$  e  $CD$  (nos quais pensamos como tendo comprimentos  $x$  e  $y$ ), justapondo cópias de  $AB$  a si mesmo um número suficientemente grande de vezes ( $n$  vezes, nas notações do enunciado da propriedade arquimediana), obteremos um segmento de comprimento maior que o comprimento do segmento  $CD$ .

A nossa primeira proposição, já comentada acima, é o suporte teórico do seguinte fato empírico: *com instrumentos de medição adequados, podemos obter boas aproximações racionais da medida de uma grandeza.* Mais ainda, teoricamente falando, o erro da aproximação pode ser tomado arbitrariamente pequeno.

**Proposição 2.** *Dados os números reais  $a$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um número racional  $r$  tal que  $|a - r| < \varepsilon$ .*

**Prova.** Inicialmente, suponhamos  $a - \varepsilon > 0$ . Pela propriedade arquimediana, existe um número natural  $n$  satisfazendo  $n > \frac{1}{2\varepsilon}$  (tome  $x = 1$  e  $y = \frac{1}{2\varepsilon}$ ). Em particular, vale  $\frac{1}{n} < 2\varepsilon < a + \varepsilon$ . Também pela propriedade arquimediana, o conjunto  $A = \{p \in \mathbb{N} \mid \frac{p}{n} \geq a + \varepsilon\}$  é não vazio (tome  $x = \frac{1}{n}$  e  $y = a + \varepsilon$ ), de forma que  $A$  admite um menor elemento  $m + 1$  (perceba que  $1 \notin A$ ). Como  $m$  não é um elemento de  $A$ , devemos ter  $\frac{m}{n} < a + \varepsilon$ . Por outro lado, pela escolha do natural  $n$ , temos

$$\frac{m}{n} = \frac{m+1}{n} - \frac{1}{n} > (a + \varepsilon) - 2\varepsilon = a - \varepsilon,$$

de modo que  $r = \frac{m}{n}$  é um número racional do intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , ou seja,  $|a - r| < \varepsilon$ .

Agora, se  $a - \varepsilon$  é qualquer, tomamos um número natural  $k$  suficientemente grande para que se tenha  $(a + k) - \varepsilon = (a - \varepsilon) + k > 0$ <sup>2</sup>. Pelo caso já tratado (tomando  $a + k$  no lugar de  $a$ ), existe um número racional  $s$  satisfazendo  $|(a + k) - s| < \varepsilon$ . Logo,  $r = s - k$  é um número racional tal que  $|a - r| < \varepsilon$ , como queríamos.  $\square$

Da discussão anterior surge a questão essencial: *qual é a propriedade do conjunto dos números reais que permite utilizá-los para medir grandezas?* De outra forma, *o que diferencia  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{Q}$ ?* No intuito de responder a essa pergunta, devemos lembrar a identificação  $\mathcal{I}$  entre o conjunto dos números reais e uma reta dada  $r$  (acompanhe na figura):

*Fixado um ponto  $O$  na reta  $r$ , denominado origem, associamos  $O$  ao número real  $0$ ; se  $x$  é um número real diferente de zero, associamos a  $x$  o ponto  $X$  da reta  $r$  satisfazendo  $\overline{OX} = |x|$ , de forma que  $X$  está à direita (resp. esquerda) de  $O$  se  $x$  é positivo (resp. negativo).*

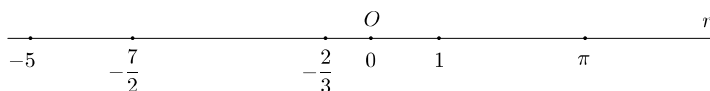


Figura 1: abaixo de alguns pontos da reta  $r$  temos os números reais que a eles se correspondem pela identificação  $\mathcal{I}$ .

<sup>2</sup>Mais uma vez, utilizamos aqui a propriedade arquimediana.

Uma descrição matematicamente precisa da frase que iniciou esta seção, relativamente à grandeza *comprimento*, é: a correspondência  $\mathcal{I} : \mathbb{R} \rightarrow r$ , que associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  o ponto  $X \in r$ , conforme descrito acima, é uma **bijecção**<sup>3</sup> Assim, todo ponto  $X$  da reta  $r$  tem uma (única) *abscissa*  $x \in \mathbb{R}$ . Essa identificação entre o conjunto  $\mathbb{R}$  e a reta  $r$  nos permitirá, a partir de uma propriedade geométrica da reta, enunciar a propriedade fundamental procurada do conjunto dos números reais (em resposta à pergunta que fizemos anteriormente). Em verdade, na próxima seção estudaremos o *axioma de continuidade da reta*, postulado que, quando transcrito para o conjunto dos números reais por meio da identificação  $\mathcal{I}$ , nos dará a *propriedade de completude* de  $\mathbb{R}$ .

Observe que a mesma correspondência  $\mathbb{Q} \ni x \mapsto X \in r$ , agora restrita ao conjunto dos números racionais, não é *sobrejetiva*: como vimos no exemplo 1, a abscissa do ponto  $P \in r$ , indicado na figura abaixo, é o número irracional  $\sqrt{2}$ .

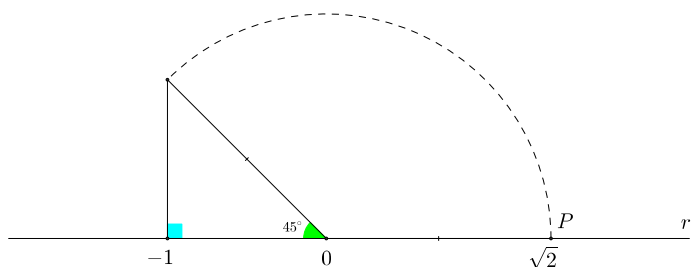


Figura 2: quando representamos os números racionais na reta  $r$ , sobram pontos.

<sup>3</sup>Na referência [1], essa afirmação compõe o chamado *axioma da régua infinita*.

## 2 O axioma de continuidade da reta

Na geometria euclidiana, retas são *objetos primitivos*, isto é, existem sem a necessidade de uma sentença que os defina. Isso é bem razoável, pois, além dos objetos ao nosso redor nos trazerem alguma experiência sobre o conceito de reta, percebemos o quanto esse conceito é básico (justificando sua escolha como objeto primitivo) pela dificuldade em defini-lo por meio de conceitos mais simples, evitando autorreferências. Por exemplo, na frase “uma reta é um conjunto infinito de pontos alinhados”, uma tentativa de definir “reta”, temos alguns problemas, dentre os quais a autorreferência “alinhados”, já que *pontos alinhados são pontos de uma reta!* Mesmo se ignorássemos essa autorreferência, teríamos que dar conta do seguinte contra-exemplo: se  $\mathcal{Z}$  é o subconjunto da reta  $r$  consistindo dos pontos cujas abscissas são números inteiros, então é evidente que  $\mathcal{Z}$  não é uma reta, muito embora  $\mathcal{Z}$  seja um conjunto infinito de pontos alinhados.

A questão, alguém diria, é que “entre dois pontos (distintos) de uma reta, há sempre um outro ponto”, propriedade que o conjunto  $\mathcal{Z}$ , definido no parágrafo anterior, não possui. Bem, essa é mais uma vã tentativa de captar o conceito de reta. De fato, se  $\mathcal{Q}$  é o subconjunto de  $r$  formado pelos pontos de abscissas racionais, então entre dois pontos distintos de  $\mathcal{Q}$  há sempre um outro ponto: se  $A, B \in \mathcal{Q}$  têm abscissas  $a$  e  $b$ , respectivamente, então o ponto médio  $M$  do segmento  $AB$ , um ponto entre  $A$  e  $B$ , pertence a  $\mathcal{Q}$ , uma vez que a abscissa de  $M$  é o número racional  $(a + b)/2$ . Além disso,  $\mathcal{Q}$  é um conjunto infinito de pontos alinhados que não é uma reta.

Explicar a afirmação “ $\mathcal{Q}$  não é uma reta” remonta à propriedade fundamental procurada de  $\mathbb{R}$  — que falta ao conjunto  $\mathcal{Q}$  dos números racionais —, mas, agora, a partir de uma perspectiva geométrica. Apesar da explicação intuitivamente óbvia “faltam pontos em  $\mathcal{Q}$ ” (e.g., o ponto  $P$  na figura 2), a evidência de tais ausências deve ser formulada do ponto de vista da *reta racional*  $\mathcal{Q}$ . Para efeito de clareza, vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.** *Considere os seguintes subconjuntos da reta*

racional ( $x$  é a abscissa do ponto  $X$ ):  $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$  e  $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$ . Se  $X \in \mathcal{A}$  e  $Y \in \mathcal{B}$ , então  $x^2 < 2 < y^2$  implica  $x < y$ , já que  $x$  e  $y$  são positivos. Assim, todo ponto de  $\mathcal{A}$  está à esquerda de cada ponto de  $\mathcal{B}$ . Porém, não há ponto algum de  $\mathcal{Q}$  separando o subconjunto  $\mathcal{A}$  do subconjunto  $\mathcal{B}$ , ou seja, não existe  $P \in \mathcal{Q}$  com a propriedade “ $P$  está entre  $X$  e  $Y$ ”, para quaisquer  $X \in \mathcal{A}$  e  $Y \in \mathcal{B}$ . Com efeito, por argumentos posteriores, um tal ponto  $P$  deveria ter abscissa  $\sqrt{2}$ , o que torna a pertinência  $P \in \mathcal{Q}$  impossível.



Figura 3: detectando um “buraco” na reta racional  $\mathcal{Q}$ .

Pela nossa intuição, esperamos que na reta  $r$  a situação descrita no exemplo anterior não ocorra. Essa questão é o tema do *axioma da continuidade*, postulado que enunciaremos após algumas definições.

Sejam  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  subconjuntos distintos de uma reta  $r$ . Diremos que  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  estão em ordem se não houver nenhum ponto de  $\mathcal{X}$  entre dois pontos de  $\mathcal{Y}$  e, da mesma forma, não houver nenhum ponto de  $\mathcal{Y}$  entre dois pontos quaisquer de  $\mathcal{X}$ .

**Exemplo 4.** Os subconjuntos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , definidos no exemplo 3, estão em ordem.

**Exemplo 5.** Seja  $\Gamma$  a circunferência de centro em  $O$  e raio  $R$ . Se  $A$  é um ponto interior a  $\Gamma$  e  $B$  é um ponto exterior a

$\Gamma$ , então os conjuntos  $\mathcal{X} = \{X \in AB \mid \overline{OX} < R\}$  e  $\mathcal{Y} = \{Y \in AB \mid \overline{OY} > R\}$  estão em ordem.

Antes de apresentar uma demonstração para o último exemplo acima, precisamos de um

**Lema 6.** *O comprimento de uma ceviana interna de um triângulo é menor que o maior dos comprimentos dos lados adjacentes.*

**Prova.** Relembremos o seguinte resultado (veja [2], seção 2.4), equivalente à desigualdade triangular: *num triângulo qualquer, o maior lado opõe-se ao maior ângulo.* Dessa forma, seja  $OX_1X_2$  um triângulo e  $OX_3$  uma ceviana interna. Como  $\widehat{OX_3X_1} + \widehat{OX_3X_2} = 180^\circ$ , não há perda de generalidade em supor que  $\widehat{OX_3X_1} \geq 90^\circ$ . Assim,  $\angle OX_3X_1$  é o maior ângulo do triângulo  $OX_1X_3$ , de sorte que, pelo resultado citado anteriormente,  $OX_1$  é o maior lado de  $OX_1X_3$ . Em particular,  $\overline{OX_1} > \overline{OX_3}$ , o que prova o lema.  $\square$

Finalmente, podemos apresentar a

**Prova do exemplo 5.** Primeiramente, observe que o resultado é imediato caso a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  passe pelo centro  $O$  de  $\Gamma$ . Realmente, nesse caso, utilizando a identificação  $\mathcal{I}$  citada na seção anterior, conclui-se que  $AB$  corta  $\Gamma$  num único ponto  $C$ , de modo que  $\mathcal{X} = AC \setminus \{C\}$  e  $\mathcal{Y} = CB \setminus \{C\}$ , estabelecendo que  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  estão em ordem.

Portanto, podemos supor que  $O \notin \overleftrightarrow{AB}$ . Assim, sejam  $X_1, X_2$  pontos de  $\mathcal{X}$  e  $X_3$  um ponto entre  $X_1$  e  $X_2$ . Pelo lema 6,  $\overline{OX_3} < \max\{\overline{OX_1}, \overline{OX_2}\} < R$ , de modo que  $X_3 \in \mathcal{X}$ ; em particular,  $X_3 \notin \mathcal{Y}$ . Se, agora, o ponto  $Y_3$  estiver situado entre os pontos  $Y_1, Y_2$  de  $\mathcal{Y}$ , podemos assumir que  $Y_1$  está situado entre  $A$  e  $Y_3$ . Pelo lema anterior,  $R < \overline{OY_1} < \max\{\overline{OA}, \overline{OY_3}\}$ , de modo que  $\overline{OY_3} > R$  (já que  $\overline{OA} < R$ ). Logo,  $Y_3 \in \mathcal{Y}$ , de onde segue que  $Y_3 \notin \mathcal{X}$ . Assim,  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  estão em ordem.  $\square$

Se os subconjuntos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  da reta  $r$  estiverem em ordem, diremos que o ponto  $P \in r$  separa  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  se, para quaisquer



$X \in \mathcal{X} \setminus \{P\}$  e  $Y \in \mathcal{Y} \setminus \{P\}$ ,  $P$  estiver situado entre  $X$  e  $Y$ . Equivalentemente,  $P$  separa  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  se uma das semirretas de  $r$  com origem  $P$  contiver  $\mathcal{X}$  e a semirreta oposta contiver  $\mathcal{Y}$ .

Por exemplo, se  $C$  é um ponto entre  $A$  e  $B$ , então  $C$  separa os segmentos  $AC$  e  $CB$ . Além disso, o ponto  $P$  indicado na figura 2 (cuja abscissa é  $\sqrt{2}$ ), separa os conjuntos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  definidos no exemplo 3.

Agora, estamos, em condições de enunciar o

**Axioma da continuidade da reta.** *Se dois subconjuntos não vazios de uma reta estão em ordem, então existe um ponto nessa reta que separa os subconjuntos dados.*

### 3 Algumas aplicações

Com o axioma da continuidade, podemos provar o seguinte resultado.

**Proposição 7.** *Todo segmento de reta que possui uma extremidade dentro e a outra extremidade fora de uma circunferência corta essa circunferência num único ponto.*<sup>4</sup>

**Prova.** Se  $\Gamma$  é a circunferência de centro em  $O$  e raio  $R$ ,  $A$  é um ponto interior a  $\Gamma$  e  $B$  é um ponto exterior a  $\Gamma$ , comecemos provando que a  $AB \cap \Gamma$  tem no máximo um ponto. Com efeito, se  $Q$  e  $Q'$  fossem pontos distintos nessa interseção, com, digamos,  $Q'$  entre  $A$  e  $Q$ , então o lema 6 nos daria  $R = \overline{OQ'} < \max\{\overline{OA}, \overline{OQ}\} = R$ , uma contradição.

Por outro lado, vimos no exemplo 5 que os conjuntos  $\mathcal{X} = \{X \in AB \mid \overline{OX} < R\}$  e  $\mathcal{Y} = \{Y \in AB \mid \overline{OY} > R\}$  estão em ordem. Pelo axioma da continuidade, existe um ponto  $P$  em  $AB$  separando  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ . Afirmamos que  $P \in \Gamma$ , ou seja,

---

<sup>4</sup>Embora o enunciado da Proposição (7) não revele nada de surpreendente, uma vez que a propriedade mencionada é facilmente intuída por uma figura simples, o mérito da nossa discussão reside na possibilidade de demonstrar tais fatos (relacionados à noção de *continuidade*) com o rigor adequado à geometria axiomática, entendendo a “figura no papel” como um mero (e, por vezes, importante) elemento de evidência, e nunca um elemento de prova.

$\overline{OP} = R$ . Provaremos isso mostrando que as alternativas “ $\overline{OP} < R$ ” e “ $\overline{OP} > R$ ” são impossíveis.

Suponhamos  $\overline{OP} < R$ , de forma que  $\varepsilon := R - \overline{OP}$  é um número real positivo. Tomando um ponto  $P'$  entre  $P$  e  $B$  satisfazendo  $\overline{PP'} < \varepsilon$ , a desigualdade triangular em  $OPP'$  dá  $\overline{OP'} < \overline{OP} + \overline{PP'} < \overline{OP} + \varepsilon = R$ , ou seja,  $P' \in \mathcal{X}$ . Mas isso é impossível, pois entre  $P$  e  $B$  não há pontos de  $\mathcal{X}$  ( $B \in \mathcal{Y}$ ). Um argumento similar prova que a desigualdade  $\overline{OP} > R$  não ocorre. Assim,  $AB \cap \Gamma = \{P\}$ , como queríamos.  $\square$

A partir da proposição anterior, podemos demonstrar de forma rigorosa a primeira proposição do Livro I dos *Elementos de Euclides* (vide [3]).

**Proposição 8.** *É possível construir (com régua e compasso) um triângulo equilátero de lado dado.*

**Prova.** Se o segmento  $AB$  foi dado, construamos um ponto  $C$  de tal forma que  $ABC$  seja um triângulo equilátero. Para tanto, basta traçarmos as circunferências  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$ , ambas de raio  $\overline{AB}$  e centradas em  $A$  e  $B$ , respectivamente; tomando  $C$  como um dos pontos de interseção dessas duas circunferências, temos que  $ABC$  é equilátero.

Resta provar que o ponto  $C$  existe, de fato. Ora, pela proposição anterior, a mediatriz  $m$  de  $AB$  deve cortar  $\Gamma_A$  num ponto  $C$ , digamos. Como  $\overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AB}$ , segue-se que  $C \in \Gamma_A \cap \Gamma_B$ , como desejado.  $\square$

**Observação 9.** O leitor que já tenha construído com régua e compasso a mediatriz de um segmento sabe que os pontos que determinam essa mediatriz são os pontos de interseção de duas circunferências. Isso não deve gerar a impressão de que apresentamos um argumento circular na prova da proposição anterior. De fato, o que utilizamos na verdade foi a existência da perpendicular a uma reta por um ponto dado, fato que pode ser estabelecido a partir do *axioma do transferidor*: confira o capítulo III da referência [1].

## 4 A completude de $\mathbb{R}$

Vamos traduzir as noções acima definidas, no contexto de uma reta  $r$ , para o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ . Primeiramente, suponhamos que  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , subconjuntos de  $r$ , estejam em ordem. Se  $\mathcal{I}(X) = \mathcal{X}$  e  $\mathcal{I}(Y) = \mathcal{Y}$ <sup>5</sup>, afirmamos que  $x \leq y$ , para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , ou  $x \geq y$ , para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Com efeito, observe inicialmente que o ponto  $C$  (de abscissa  $c$ ) está situado entre os pontos  $A$  e  $B$  (de abscissas  $a$  e  $b$ , respectivamente) se, e só se,  $a < c < b$  ou  $a > c > b$ . Assim, como  $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$ , podemos supor que existem  $x_0 \in X \setminus Y$  e  $y_0 \in Y$  tais que  $x_0 < y_0$  (o caso  $x_0 > y_0$  é tratado de forma similar). Desse modo, sejam  $x \in X$  e  $y \in Y$  quaisquer. Se tivéssemos  $x_0 > y$ , haveria um ponto de  $\mathcal{X}$  (aquele de abscissa  $x_0$ ) entre dois pontos de  $\mathcal{Y}$  (aqueles de abscissas  $y$  e  $y_0$ ), o que não é possível. Portanto, vale  $x_0 < y$ . Se fosse  $y < x$ , teríamos um ponto de  $\mathcal{Y}$  entre dois pontos de  $\mathcal{X}$ , fato que mais uma vez contradiz a hipótese de que  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  estão em ordem. Portanto, conclui-se que  $x \leq y$ , necessariamente.

Agora, se o ponto  $P$ , de abscissa  $p$ , separar os conjuntos em ordem  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , é evidente que  $x \leq p \leq y$ , para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , ou  $x \geq p \geq y$ , para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

A discussão acima nos permite enunciar a seguinte propriedade fundamental do conjunto dos números reais:

**Completude de  $\mathbb{R}$ .** *Se  $X, Y \subset \mathbb{R}$  são tais que  $x \leq y$ , para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , então existe um número real  $p$  satisfazendo  $x \leq p \leq y$ , quaisquer que sejam  $x \in X$  e  $y \in Y$ .*

Uma consequência importante da completude de  $\mathbb{R}$  é o seguinte resultado:

**Teorema 10** (O princípio dos intervalos encaixantes). *Seja  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de intervalos (fechados e limitados) satisfazendo as seguintes condições:*

---

<sup>5</sup>Ou seja,  $X$  (resp.  $Y$ ) é o subconjunto de  $\mathbb{R}$  consistindo das abscissas de pontos de  $\mathcal{X}$  (resp.  $\mathcal{Y}$ ).

1. A sequência é encaixante, ou seja,  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ , para cada natural  $n$ .
2. A sequência é colapsante, isto é, para cada número real positivo  $\varepsilon$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$  (os comprimentos dos intervalos tendem a zero).

Então, existe um único número real  $p$  satisfazendo  $a_n \leq p \leq b_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  (ou seja,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{p\}$ ).

**Prova.** A 1ª condição a respeito da sequência de intervalos  $([a_n, b_n])$  pode ser reescrita como  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ , para todo número natural  $n$ . Daí é fácil ver que, se  $m \leq n$ , então  $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$ . Em particular,  $a_n \leq b_m$ , para quaisquer números naturais  $m$  e  $n$ , pois, se  $k = \max\{m, n\}$ , temos  $a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_m$ , o que implica a desigualdade desejada.

Dessa forma, se  $X = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  é o conjunto dos extremos inferiores e  $Y = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  é o conjunto dos extremos superiores dos intervalos  $[a_n, b_n]$ , a propriedade da completude nos garante que existe  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \leq p \leq b_n$ , para todo natural  $n$ .

Agora só falta provar a unicidade, ou seja, se  $p'$  é um número real satisfazendo  $a_n \leq p' \leq b_n$ , para cada natural  $n$ , então  $p' = p$ . Ora, suponhamos por contradição que se tenha  $p' \neq p$  e definamos  $\varepsilon = |p - p'|/2$ , um número positivo. Pela 2ª condição relacionada à sequência  $([a_n, b_n])$ , existe um natural  $n_0$  satisfazendo  $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$ . Por outro lado, como  $p, p' \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ , concluímos as desigualdades  $\varepsilon < |p - p'| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$ , as quais nos dão o absurdo  $\varepsilon < \varepsilon$ . O teorema está demonstrado.  $\square$

**Observação 11.** O princípio dos intervalos encaixantes declara que um número real fica univocamente determinado a partir de sequências de aproximações por falta (os  $a_n$ 's) e por excesso (os  $b_n$ 's). Por exemplo, se  $a_n$  e  $b_n$  são, respectivamente, as áreas dos polígonos regulares de  $2^{n+1}$  lados, respectivamente inscrito e circunscrito no círculo unitário, então a sequência  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  é encaixante e colapsante: veja a seção 5.3 da referência [2]. Pelo teorema anterior, há um

único número real, denotado  $\pi$ , em cada intervalo  $[a_n, b_n]$ . Por definição,  $\pi$  é a área do círculo unitário.

**Observação 12.** O princípio dos intervalos encaixantes também costuma ser enunciado sem a 2ª condição no teorema (10). Mais precisamente, tem-se, agora, apenas uma sequência encaixante  $([a_n, b_n])$  de intervalos, e a conclusão é que existe um número real  $p$  (não necessariamente único) tal que  $a_n \leq p \leq b_n$ , para cada natural  $n$ . A demonstração dessa versão segue dos dois primeiros parágrafos da prova do teorema (10).

Utilizaremos a observação anterior no próximo

**Exemplo 13.** *Dada uma função qualquer  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , prove que  $f$  não é sobrejetiva.*

**Prova.** Escrevendo  $x_n = f(n)$ , precisamos mostrar que existe um número real  $p$  satisfazendo  $p \neq x_n$ , para cada  $n$  natural. Vamos começar tomando um intervalo que não contenha  $x_1$ , por exemplo,  $[a_1, b_1]$  com  $a_1 = x_1 + 1$  e  $b_1 = x_1 + 2$ . A ideia, agora, é produzir uma sequência encaixante de intervalos  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  não degenerados (isto é, que não se reduzam a um ponto) de modo que, para cada  $n$  natural,  $x_n$  não pertença ao intervalo  $[a_n, b_n]$ .

Suponha, por hipótese de indução, que os  $n$  primeiros intervalos  $[a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$  já foram definidos de tal forma que  $x_i \notin [a_i, b_i]$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ . Para definir  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ , analisaremos dois casos:

1º -  $x_{n+1} \notin [a_n, b_n]$ : sendo esse o caso, pomos  $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, b_n]$ ;

2º -  $x_{n+1} \in [a_n, b_n]$ : como  $x_{n+1}$  não pode ser simultaneamente igual a  $a_n$  e  $b_n$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que  $x_{n+1} < b_n$ . Então, pomos  $[a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[ \frac{x_{n+1} + b_n}{2}, b_n \right]$ .

Em qualquer caso, vale  $x_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  e a definição indutiva da sequência  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  está completa, de sorte que

$$x_n \notin [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Pela observação 12, existe um número real  $p$  tal que

$$p \in [a_n, b_n], \quad (2)$$

para cada  $n$  natural. Pelas relações (1) e (2), conclui-se que  $p \neq x_n$ , para todo  $n$ . Assim,  $p \notin \text{Im}(f)$ , de sorte que  $f$  não é sobrejetiva.  $\square$

Uma forma útil do princípio 10 consiste do chamado *método das bisseções sucessivas*. Nesse contexto, temos uma sequência de intervalos  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ , sendo cada  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  uma metade de  $[a_n, b_n]$  <sup>6</sup>. É claro que a sequência  $([a_n, b_n])$  é encaixante. Ela também é colapsante, pois, como é fácil de verificar por indução,  $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , a propriedade arquimediana nos garante a existência de um número natural  $n_0$  satisfazendo  $n_0\varepsilon > b_1 - a_1$ . Como  $n_0 \leq 2^{n_0-1}$ , vem que  $b_{n_0} - a_{n_0} = (b_1 - a_1)/2^{n_0-1} \leq (b_1 - a_1)/n_0 < \varepsilon$ .

**Exemplo 14.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma função monótona não decrescente, isto é, tal que  $a \leq x \leq y \leq b \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . Mostre que  $f$  admite um ponto fixo  $c \in [a, b]$ , ou seja, tal que  $f(c) = c$ .*

**Prova.** Intuitivamente, a ideia é simples: se uma curva plana  $\mathcal{C}$  passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  de modo que  $P$  não está abaixo da diagonal  $d : x = y$  e  $Q$  não está acima da diagonal  $d$ , então essa curva  $\mathcal{C}$  passa por algum ponto da diagonal  $d$ .

Perceba que, como  $a \leq f(a)$  e  $f(b) \leq b$ ,

*o extremo à esquerda do gráfico de  $f$  não está abaixo da diagonal  $d$ , ao passo o extremo à direita desse gráfico <sup>7</sup> não está acima da diagonal  $d$ .*

Produziremos bisseções sucessivas do intervalo  $[a_1, b_1] := [a, b]$  de tal modo que, sobre cada metade escolhida, o gráfico de  $f$  satisfaça o enunciado acima. Ao fazê-lo, estaremos “cercando” um ponto fixo de  $f$ .

<sup>6</sup>Se  $I = [c, d]$ , as metades de  $I$  são os intervalos  $[c, (c+d)/2]$  e  $[(c+d)/2, d]$ .

<sup>7</sup>Esses pontos extremos são, respectivamente,  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

Pois bem, supondo que os intervalos  $[a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$  já foram definidos (por bisseções) de forma que  $a_i \leq f(a_i)$  e  $f(b_i) \leq b_i$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ , temos dois casos a considerar:

$$1^\circ - f((a_n + b_n)/2) \leq (a_n + b_n)/2.$$

$$2^\circ - f((a_n + b_n)/2) > (a_n + b_n)/2.$$

No primeiro caso, tomamos  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  como a primeira metade  $[a_n, (a_n + b_n)/2]$  do intervalo  $[a_n, b_n]$  e, no segundo caso,  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  será definido como a segunda metade,  $[(a_n + b_n)/2, b_n]$ . Em qualquer caso, tem-se  $a_{n+1} \leq f(a_{n+1})$  e  $f(b_{n+1}) \leq b_{n+1}$ , completando a definição indutiva da sequência  $([a_n, b_n])$ .

Agora, por construção, temos

$$a_n \leq f(a_n), f(b_n) \leq b_n, \quad (3)$$

seja qual for o número natural  $n$ . Pelo princípio dos intervalos encaixantes, existe um *único* número real  $c$  satisfazendo  $a_n \leq c \leq b_n$ , para todo  $n$ . Pela monotonicidade da função  $f$ , seguem as desigualdades  $f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$  o que, juntamente com as relações (3), dá  $a_n \leq f(c) \leq b_n$ , para cada  $n$ . Por unicidade, concluímos a igualdade desejada,  $f(c) = c$ .  $\square$

## Dicas para o Professor

É possível cobrir a seção 4 deste material, partindo da propriedade da completude de  $\mathbb{R}$ , num encontro de 50min. Nesse resumo, sugerimos que as ideias dos resultados dessa seção sejam explicadas, as demonstrações omitidas (num primeiro momento) e os exemplos 13 e 14 tratados em detalhes. Naturalmente, essa é uma opção que sacrifica a motivação geométrica apresentada em benefício do tempo. Todavia, em três sessões de 50min, o Professor poderá explorar a propriedade da completude de um ponto de vista mais geométrico,

passando por todas as seções do texto, perfazendo um caminho mais longo, mas, provavelmente, mais instrutivo.

Apresentaremos outras formas da completude de  $\mathbb{R}$  e mais aplicações na 2ª parte dessa aula.

Portal OBMEP



## Sugestões de Leitura Complementar

1. J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. 11<sup>a</sup> ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana*. 2<sup>a</sup> ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
3. Euclides. *Os Elementos*. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
4. E. L. Lima. *Medida e Forma em Geometria*. 4<sup>a</sup> ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2011.