Material Teórico - Módulo Sistemas de Numeração e Paridade

Sistemas de Numeração - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de dezembro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, apresentamos exemplos diversos sobre sistemas de numeração.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Complete a tabela abaixo, em que o termo que está na interseção da linha i com a coluna j é dado pelo produto $i \cdot j$, escrito na base 5.*

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3			11		
4					

Por exemplo, o termo que está na interseção da linha 3 com a coluna 2 é o produto de 3 por 2 escrito na base 5. De fato, $3 \cdot 2 = 6$ e $6 = 1 \cdot 5 + 1$, ou seja, $(6)_{10} = (11)_5$.

Solução. Temos que $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 2 = 2 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 3 = 3 \cdot 0 = 0$ e $0 \cdot 4 = 4 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$, $1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = 3$, $1 \cdot 4 = 4 \cdot 1 = 4$; $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$ e $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8$; $3 \cdot 3 = 9$ e $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$; $4 \cdot 4 = 16$. Mas

$$8 = 1 \cdot 5 + 3,$$

$$9 = 1 \cdot 5 + 4,$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

e

$$16 = 3 \cdot 5 + 1.$$

Assim, completando a tabela, obtemos

□

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Exemplo 2. *Existe base n na qual as igualdades abaixo sejam simultaneamente verdadeiras?*

$$\begin{cases} 3+4=10 \\ 3 \cdot 4=15 \end{cases}$$

Solução. Como o maior dos algarismos envolvidos nas igualdades é 5, a primeira tentativa seria $n = 6$. Entretanto, $3 + 4 = 7$ e $7 = 1 \cdot 6 + 1$, ou seja, $(7)_{10} = (11)_6$. Logo, a primeira igualdade não é satisfeita. Fazendo $n = 7$, obtemos $3 + 4 = 7$ e $7 = 1 \cdot 7 + 0$; $3 \cdot 4 = 12$ e $12 = 1 \cdot 7 + 5$. Portanto,

$$\begin{cases} 3+4=\ 7\ =(10)_7 \\ 3 \cdot 4=12=(15)_7 \end{cases}$$

□

Exemplo 3. *Existe base n na qual as igualdades abaixo sejam simultaneamente verdadeiras?*

$$\begin{cases} 2+3=\ 5 \\ 2 \cdot 3=11 \end{cases}$$

Solução. Novamente, a primeira tentativa seria $n = 6$. Mas, neste caso, teríamos $2 \cdot 3 = 6$ e $(6)_{10} = (10)_6$. Portanto, a segunda equação não seria verdadeira. Para qualquer outra base $n > 6$, temos que $2 \cdot 3 = 6$ e $(6)_{10} = (6)_n$, logo, a segunda equação também não é verdadeira. Assim, concluímos que não existe base n na qual as equações sejam simultaneamente verdadeiras. □

Exemplo 4. *Em qual base foram feitos os cálculos abaixo?*

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 3 & \spadesuit & 5 & \clubsuit \\ + & 1 & \blacklozenge & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

Solução. Como o maior dos algarismos envolvidos nos cálculos é 6, a nossa primeira tentativa será a base 7. De fato, pensando os cálculos nessa base, temos $\clubsuit = 1$, pois essa é a única possibilidade para $\clubsuit + 2 = 3$. Agora, veja que $5 + 4 = 9$ e $(9)_{10} = (12)_7$, pois $9 = 1 \cdot 7 + 2$, Logo,

$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & & \\ & 2 & 3 & \spadesuit & 5 & 1 \\ + & 1 & \blacklozenge & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

Daí, $1 + \spadesuit + 6 = (14)_7 = 1 \cdot 7 + 4 = (11)_{10}$, o que implica $\spadesuit = 4$. Assim, obtemos

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ + & 1 & \blacklozenge & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

Desse modo, $1 + 3 + \blacklozenge = (12)_7 = 1 \cdot 7 + 2 = (9)_{10}$, donde obtemos $\blacklozenge = 5$. Portanto, $\square$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ + & 1 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

Exemplo 5. *Mostre que a representação de* $(102012)_3$ *na base* 10 *é um número par.*

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}(102012)_3 &= 1\cdot 3^5 + 0\cdot 3^4 + 2\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 2\\ &= 243 + 2\cdot 27 + 3 + 2\\ &= (302)_{10}.\end{aligned}$$

Logo, a representação de $(102012)_3$ na base 10 é um número par. □

Observação 6. *No exemplo 5, tivemos de encontrar a representação de* $(102012)_3$ *na base* 10 *para verificar que que essa representação é realmente um número par. Alternativamente, veja que se* n *é um número natural, então* 3^n *claramente um número ímpar, pois é o produto de* n *fatores iguais a* 3*. Assim,* $3^5 = 2k_5 + 1$, $3^4 = 2k_4 + 1$, $3^3 = 2k_3 + 1$ *e* $3^2 = 2k_2 + 1$*. Daí,*

$$\begin{aligned}(102012)_3 &= 1\cdot 3^5 + 2\cdot 3^3 + 1\cdot 3 + 2\\ &= 1\cdot(2k_5+1) + 0\cdot(2k_4+1) + 2\cdot(2k_3+1)\\ &\quad + 0\cdot(2k_2+1) + 1\cdot(2k_1+1) + 2\\ &= 2k_5 + 4k_3 + 2k_1 + (1+0+2+0+1+2)\\ &= 2\cdot(k_5 + 2k_3 + k_1) + (1+0+2+0+1+2)\\ &= 2q + (1+0+2+0+1+2).\end{aligned}$$

Assim, como $2q$ *é par, a representação de* $(102012)_3$ *na base* 10 *é um número par se, e somente se, a soma dos algarismos* $1+0+2+0+1+2$ *é par. Como* $1+0+2+0+1+2=6$*, concluímos que a representação de* $(102012)_3$ *na base* 10 *é par. O argumento que utilizamos aqui pode ser aplicado a qualquer representação na base* 3*. De fato, a representação de* $(a_1a_2\ldots a_n)_3$, $a_i \in \mathbb{Z}, \leq a_i \leq 2, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$*, na base decimal é par se, e somente se,* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *é par.*

Exemplo 7 (Colégio Naval)**.** *Um livro de* 200 *páginas foi reenumerado no sistema de numeração de base* 8*. O número de algarismos que foram utilizadas (na base decimal) para reenumerar as páginas desse livro é:*

(*a*) 520.

(*b*) 525.

(*c*) 530.

(*d*) 535.

(*e*) 540.

Solução. Dividindo sucessivamente 200 por 8, encontramos

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,0 & 8 \\ \cline{2-2} 4\,0 & 2\,5 \\ 0 & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|l} 2\,5 & 8 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$$

Logo, $(200)_{10} = (310)_8$. Desse modo, o número da última página é 310. Agora, para contar a quantidade de algarismos utilizados para reenumerar todas as páginas, vamos separar os números por quantidade de algarismos.

- As páginas de 1 até 7 são numeradas com números de 1 algarismo, totalizando 7 algarismos.

- As páginas de 10 até 77 são formadas por números de 2 algarismos. Para calcular a quantidade de algarismos utilizados para reenumerar essas páginas, basta encontrar a quantidade de páginas e multiplicar essa quantidade por 2, pois cada página foi reenumerada com um número de dois algarismos. Agora, para saber a quantidade de páginas, basta utilizar o princípio multiplicativo. Com efeito, o algarismo da esquerda (segunda ordem) pode ser esclhido de 7 modos, pois não pode ser igual a zero, e o da direita (primeira ordem) pode ser escolhido de 8 modos. Logo, o total de páginas que foram reenumeradas com números de 2 algarismos é $7 \cdot 8 = 56$ e o total de algarismos utilizados nessas páginas é $56 \cdot 2 = 112$.

- Como o total de páginas é 200, a quantidade de páginas que foram reenumeradas com números de 3 algarimos é $200-(7+56) = 200-63 = 137$. Assim, o total de algarimos que foram utilizados para reenumerar essas páginas é $137 \cdot 3 = 411$.

Concluímos que o total de algarismos utilizados para reenumerar as páginas do livro é

$$7 + 112 + 411 = 530.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(c)**. $\square$

Exemplo 8. *Se* $(xyxy)_n = 1300$*, qual o valor de* $x + y + n$*?*

(a) 13.

(b) 14.

(c) 15.

(d) 16.

(e) 17.

Solução. Como $(xyxy)_n = 1300$, temos

$$\begin{aligned} xn^3 + yn^2 + xn + y = 1300 &\iff n^2(xn + y) + xn + y = 1300 \\ &\iff (n^2 + 1)(xn + y) = 1300. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que $n^2 + 1$ e $xn + y$ são inteiros positivos, os dois são divisores de 1300 cujo produto é igual a 1300. Assim, notando que $1300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13$ as possibilidades para o par $\{n^2 + 1, xn + y\}$ são $\{1,1300\}$, $\{2,650\}$, $\{4,325\}$, $\{5,260\}$, $\{10,130\}$, $\{13,100\}$, $\{20,65\}$, $\{25,52\}$, $\{26,50\}$. Desse modo, como $n^2 + 1$ é o sucessor de um quadrado perfeito, as únicas possibilidades viáveis são $n^2 + 1 = 5$ e $xn + y = 260$; $n^2 + 1 = 10$ e $xn + y = 130$; e $n^2 + 1 = 65$ e $xn + y = 20$. As duas primeiras possibilidades, $n = 2$ e $n = 3$, revelam-se inviáveis pois no primeiro caso devemos ter $2x + y = 260$, $0 \leq x,y \leq 2$, e no segundo $3x+y = 130$, $0 \leq x,y \leq 3$. As duas equações não possuem solução. Por outro lado, $n^2+1=65$ e $xn+y=20$ implica $n=8$, $x=2$ e $y=4$. Portanto, $x+y+n=14$ e a alternativa correta é a da letra **(b)**. $\square$

Exemplo 9 (Olimpíada do Canadá). *O número N é um inteiro que possui representação na base b igual a 777, ou seja, $N=(777)_b$. Calcule o menor valor de b tal que N é uma quarta potência perfeita.*

Solução. Temos que

$$N = 7b^2+7b+7 = 7(b^2+b+1).$$

Por outro lado, se N é uma quarta potência perfeita, deve existir $a \in \mathbb{Z}$ tal que $N=a^4$. Daí,

$$7(b^2+b+1)=a^4.$$

Desse modo, obtemos $7 \mid a^4$ e, uma vez que 7 é primo, $7 \mid a$. Assim, $7^4 \mid a^4$, logo, $N=a^4 \geq 7^4$. Agora, se existir b inteiro positivo tal que $7(b^2+b+1)=7^4$, então esse será o menor valor de b tal que N é uma quarta potência perfeita. Afirmamos que existe b inteiro positivo tal que $7(b^2+b+1)=7^4$. De fato, resolvendo a equação do segundo grau $7(b^2+b+1)=7^4$ obtemos

$$\begin{aligned} 7(b^2+b+1)=7^4 &\iff b^2+b+1=7^3 \\ &\iff b^2+b-342=0 \\ &\iff b=18 \text{ ou } b=-19. \end{aligned}$$

Portanto, como b deve ser positivo, 18 é o menor valor de b tal que N é uma quarta potência perfeita. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Ao expor o exemplo 5, explique que o argumento é generalizável para uma base n qualquer.