Material Teórico - Módulo Sistemas de Numeração e Paridade

Paridade - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de fevereiro de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

1 Paridade

Dizemos que a **paridade** de um número natural n é **par** se n deixa resto 0 ao ser dividido por 2. Caso o resto da divisão de n por 2 seja igual a 1, dizemos que a **paridade** de n é **ímpar**.

Embora esses conceitos sejam extremamente simples, a ideia de paridade é utilizada nas soluções de diversos problemas interessantes. Ao longo deste material, apresentaremos alguns exemplos envolvendo essa ideia. Antes, porém, relembraremos certas propriedades sobre operações aritméticas envolvendo números pares e ímpares, as quais serão relevantes para o que virá em seguida.

Proposição 1.

(*i*) *A soma de dois números naturais é par se, e somente se, os números tiverem a mesma paridade.*

(*ii*) *A soma de uma quantidade qualquer de números pares é par.*

(*iii*) *A soma de uma certa quantidade de números ímpares é ímpar se, e somente se, essa quantidade for ímpar.*

(*iv*) *O produto de uma quantidade qualquer de números naturais é par se, e somente se, um dos números for par.*

Prova.
(i) Sejam m e n números naturais. Se m e n são ambos pares, então existem p e q naturais tais que $m = 2p$ e $n = 2q$. Daí,

$$m + n = 2p + 2q = 2(p + q) \text{ é par.}$$

Se m e n são ambos ímpares, então $m = 2p + 1$ e $n = 2q + 1$, logo,

$$\begin{aligned} m + n &= 2p + 1 + 2q + 1 = 2p + 2q + 2 \\ &= 2(p + q + 1) \text{ é par.} \end{aligned}$$

Reciprocamente, se m e n têm paridades distintas, então $m = 2p$ e $n = 2q+1$ ou $m = 2p+1$ e $n = 2q$. Em qualquer caso, temos que

$$m + n = 2p + 2q + 1 = 2(p+q) + 1 \text{ é ímpar.}$$

(ii) Sejam n_1, n_2, ..., n_k números pares. Então, existem inteiros q_1, q_2, ..., q_k tais que $n_1 = 2q_1$, $n_2 = 2q_2$, ..., $n_k = 2q_k$. Logo,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \ldots + n_k &= 2q_1 + 2q_2 + \ldots + 2q_k \\ &= 2(q_1 + q_2 + \ldots + q_k), \end{aligned}$$

o que mostra que a soma de uma quantidade qualquer de números pares é par.

(iii) Já sabemos que a soma de dois números ímpares é par e que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

Se a quantidade de números ímpares que desejamos somar for par, podemos agrupar esses números em pares e somar os números de cada par. Fazendo isso, obteremos uma soma de números pares, cujo resultado será par.

Se a quantidade de números ímpares que desejamos somar for ímpar, retiramos um desses números e somamos os demais. Como estamos somando uma quantidade par de números ímpares, o argumento do parágrafo anterior garante que a soma será par. Adicionando novamente o número (ímpar) retirado, obtemos uma soma ímpar.

(iv) É fácil ver que o produto de dois números ímpares é ímpar. De fato, se $m = 2p+1$ e $n = 2q+1$, então

$$\begin{aligned} mn &= (2p+1)(2q+1) = 2pq + 2p + 2q + 1 \\ &= 2(pq + p + q) + 1 \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Se um dos números é par, digamos $m = 2p$ e $n = 2q+1$, então

$$mn = 2p(2q+1) = 2\left[p(2q+1)\right] \text{ é par.}$$

Desse modo, concluímos que o produto de uma quantidade qualquer de números ímpares é ímpar e o produto de uma quantidade qualquer de números naturais é par se um desses números for par. □

Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2. *É possível trocar uma nota de* 50 *reais em quinze notas de* 1 *ou* 5 *reais?*

Solução. Ao somar os valores de 15 notas de 1 ou 5 reais, obteremos uma quantidade ímpar, pois somaremos uma quantidade ímpar de números ímpares. Logo, não é possível trocar uma nota de 50 em quinze notas de 1 ou 5. □

Exemplo 3. *Joaquim comprou um livro com* 120 *folhas, cujas páginas são numeradas de* 1 *a* 240*. Manoel, irmão caçula de Joaquim, rasgou* 25 *das folhas do livro e somou os números escritos nessas folhas. É possível que ele tenha encontrado* 2022 *como resultado dessa soma?*

Solução. A soma dos números das duas páginas que formam cada uma das 25 folhas arrancadas é ímpar, pois esses números têm paridades distintas, uma vez que são consecutivos. Assim, ao somar os resultados obtidos nas 25 folhas, Manoel somará uma quantidade ímpar de números ímpares, obtendo, assim, um número ímpar. Portanto, essa soma não pode ser igual a 2022. □

Exemplo 4. *O produto de* 2022 *inteiros é igual a* 1*. Mostre que sua soma não pode ser zero.*

Solução. Como os fatores são todos inteiros, cada um deles deve ser 1 ou -1, pois o produto é igual a 1. Agora, a quantidade de fatores iguais a -1 não pode ser ímpar, senão o produto seria igual a -1 em vez de 1. Desse modo, as quantidades de fatores -1 e 1 são ambas pares, pois a soma dessas quantidades é 2022 e a quantidade de fatores -1, como vimos, é par.

Por outro lado, se a soma de todos esses fatores fosse 0, as quantidades de fatores -1 e 1 deveriam ser iguais. Mas isso não pode acontecer, pois $2022 \div 2 = 1011$, que é ímpar. □

Exemplo 5. *Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três desses soldados são escolhidos para trabalhar de sentinelas. É possível que, após certo tempo, um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?*

Solução. Digamos que Adonias seja um dos 100 soldados. Em cada noite em que trabalha, Adonias terá a companhia de dois soldados diferentes. Veja que nenhum dos dois soldados que trabalham com Adonias a cada noite pode reaparecer nas noites seguintes, pois, se isso acontecesse, Adonias trabalharia com um mesmo soldado em mais de uma noite. Logo, deveria ser possível agrupar os outros 99 soldados em pares para as noites de trabalho com Adonias. É claro que isso não pode acontecer, pois 99 é um número ímpar. □

Exemplo 6. *De* 101 *moedas,* 50 *são falsas e a diferença de peso entre uma dessas moedas e uma autêntica é* 1 g. *Pedro tem uma balança com dois pratos, que mostra a diferença entre os pesos dos objetos colocados em cada prato. Há como descobrir se uma moeda qualquer escolhida por Pedro é autêntica fazendo apenas uma pesagem?*

Solução. Uma vez que Pedro tenha escolhido uma dentre as 101 moedas, vamos pesar as outras 100 moedas colocando 50 moedas em cada prato da balança. Para tanto, denotemos por p o peso de uma moeda autêntica, de forma que o peso de uma moeda falsa será $p-1$ ou $p+1$. Suponhamos que o peso de uma moeda falsa seja $p-1$, sendo o caso do peso $p+1$ completamente análogo.

Se a moeda escolhida por Pedro for autêntica, as demais moedas se dividem em 50 moedas autênticas e 50 moedas falsas. Ao colocarmos 50 moedas em cada prato, em um deles teremos colocado um certo número n de moedas autênticas e $50-n$ moedas falsas; assim, o outro prato ficará com $50-n$ moedas autênticas e n moedas falsas. Dessa forma, a diferença de peso entre os dois pratos será

$$\begin{aligned}
&[np + (50 - n)(p - 1)] - [(50 - n)p + n(p - 1)] = \\
&= n[p - (p - 1)] + (50 - n)[(p - 1) - p] \\
&= n - (50 - n) = 2n - 50.
\end{aligned}$$

Veja que, se $n < 25$, esse valor será negativo, o que indica apenas que o prato mais leve será o que contiver as n moedas autênticas. De qualquer modo, concluímos que, se a moeda escolhida por Pedro for autêntica, então a balança sempre mostrará um resultado par.

Suponha, agora, que a moeda escolhida por Pedro seja falsa. Então, as demais moedas se dividem em 51 moedas autênticas e 49 moedas falsas. Ao colocarmos 50 moedas em cada prato, em um deles teremos colocado um certo número n de moedas autênticas e $50 - n$ moedas falsas, enquanto o outro prato ficará com $51 - n$ moedas autênticas e $n - 1$ moedas falsas. Dessa forma, a diferença de peso entre os dois pratos será

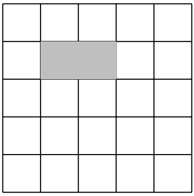
$$\begin{aligned}
&[np + (50 - n)(p - 1)] - [(51 - n)p + (n - 1)(p - 1)] = \\
&= [np + (50 - n)(p - 1)] - [(50 - n)p + n(p - 1) + 1] \\
&= (2n - 50) - 1.
\end{aligned}$$

Assim, se a moeda escolhida por Pedro for falsa, então a balança sempre mostrará um resultado ímpar.

Portanto, separando a moeda escolhida e pesando as outras 100 moedas pondo 50 em cada prato da balança, concluímos que a moeda escolhida é autêntica se o resultado apresentado pela balança for par e falsa se o resultado apresentado pela balança for ímpar. □

Exemplo 7. *É possível cobrir completamente um tabuleiro* 5×5 *utilizando peças de dominó* 2×1 *e sem sobrepor peças? Justifique sua resposta!*

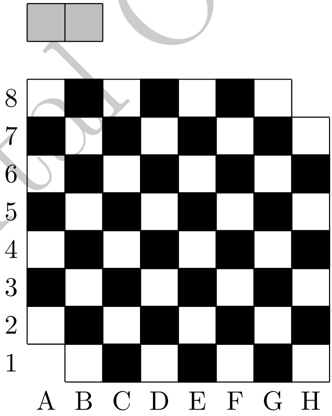
Solução. Suponha que seja possível. Como as peças têm formato 2×1, cada uma delas cobrirá exatamente duas das



25 casas do tabuleiro (um exemplo é mostrado na figura a seguir).

Portanto, qualquer quantidade de peças colocadas sem sobreposição sobre o tabuleiro cobrirá uma quantidade par de casas. Logo, não é possível cobrir completamente o tabuleiro 5×5 por peças de dominó 2×1 e sem sobreposição de peças, pois ele possui um total de 25 casas. $\square$

Exemplo 8. *Um tabuleiro de xadrez pode ser coberto por dominós 2×1 de modo que somente as casas A1 e H8 não sejam cobertas?*

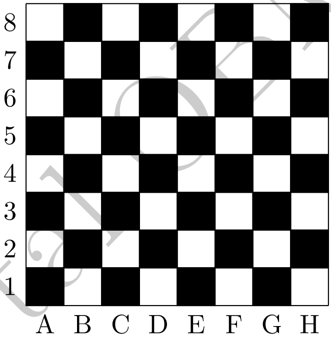


Solução. Suponha que fosse possível. Então, cada peça 2×1 colocada sobre o tabuleiro desfalcado cobriria uma casa branca e uma preta, logo, ao cobrir o tabuleiro desfalcado com as peças 2×1, as quantidade de casas pretas e brancas cobertas pelos dominós seria iguais. Mas veja que as casas A1 e H8 são ambas pretas, de forma que o tabuleiro desfalcado tem duas casas brancas a mais que casas pretas. Isso é uma contradição, e indica que o tabuleiro desfalcado não pode ser coberto por peças de dominó 2×1. $\square$

Exemplo 9. *Observe o tabuleiro de xadrez na figura abaixo.*

(*a*) *Um cavalo sai da posição A1 e retorna para a mesma posição depois de vários movimentos. Mostre que o cavalo fez uma quantidade par de movimentos.*

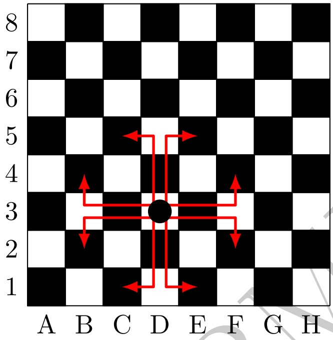
(*b*) *É possível um cavalo iniciar na posição A1 e terminar na posição H8, visitando todas as outras casas exatamente uma vez?*



Solução. No Xadrez, o cavalo é uma peça que faz movimentos em "L". Isso significa que ele percorre duas casas na vertical seguidas por uma na horizontal ou duas casas na horizontal seguidas de uma casa na vertical.

Por exemplo, um cavalo que ocupa a casa D3 (branca) pode ser movido para uma das seguintes casas: C1, C5, E1, E5 — caso ele percorra duas casas na vertical seguidas por uma na horizontal — ou B2, B4, F2, F4 — caso ele percorra duas casas na horizontal seguidas por uma na vertical (acompanhe na próxima figura).

Observe que, em qualquer uma das opções de movimentação do cavalo partindo da casa D3, a casa ocupada depois do movimento é preta. De fato, quando um cavalo se movimenta, ele vai de uma casa branca para uma preta ou de uma casa preta para uma branca (reflita sobre isso!).



(a) Graças ao argumento acima, concluímos que a cor da casa que o cavalo ocupa muda a cada movimento. Como a casa de início é a mesma que finaliza os movimento, a quantidade de movimentos não pode ser ímpar, pois isso implicaria uma mudança na cor da casa ocupada.

(b) Para sair da casa A1, visitar todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e finalizar na casa H8, seriam necessários 63 movimentos. Por outro lado, as casas A1 e H8 são ambas pretas. Mas, como vimos, não é possível sair de uma casa preta e chegar em outra casa preta realizando uma quantidade ímpar de movimentos. Portanto, não é possível um cavalo iniciar na posição A1 e terminar na posição H8, visitando todas as outras casas exatamente uma vez. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Para facilitar a compreensão dos problemas de tabuleiro, é interessante utilizar um jogo de xadrez com tabuleiro e peças de verdade. Ao apresentar a proposição 1, faça alguns exemplos numéricos, pois isso facilita bastante o entendimento das propriedades apresentadas.

A referência a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. D. Fomin; S. Genkin; I. Itenberg. *Círculos Matemáticos. A Experiência Russa.* IMPA, Rio de Janeiro, 2012.