Material Teórico - Módulo Inequações Mistas e Sistemas

Inequações mistas

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

29 de junho de 2020

1 Inequações mistas

Neste material, utilizaremos os conhecimentos adquiridos nos módulos sobre inequações do primeiro e segundo graus para estudar inequações produto e quociente que envolvem funções afins e quadráticas. Iniciamos com o seguinte exemplo:

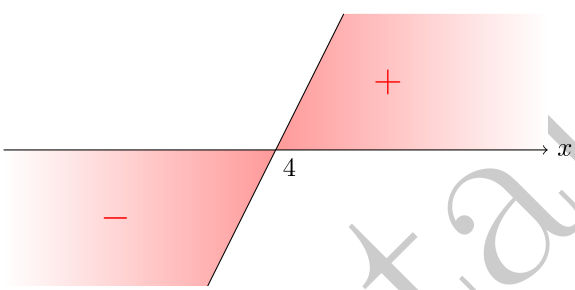
Exemplo 1. *Para quais números reais x vale*

$$(2x-8)(-x^2-2x+3) \geq 0$$

Solução. Repetindo o procedimento feito nos módulos sobre inequações produto e quociente, vamos analisar, separadamente, os sinais da função afim $f(x) = 2x - 8$ e da função quadrática $g(x) = -x^2 - 2x + 3$. Veja que

$$2x - 8 = 0 \Longleftrightarrow x = 4.$$

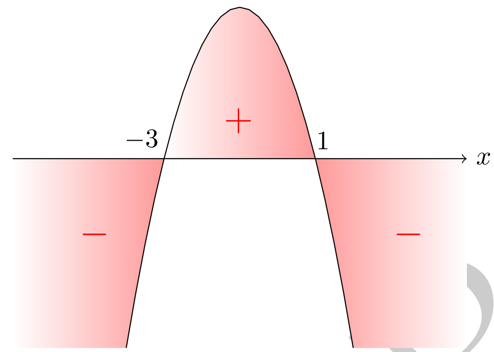
Desse modo, $f(x)$ tem raiz igual a 4. Além disso, como a taxa de variação de f é igual a 2 (que é um número real positivo), temos que f é crescente. Logo, o gráfico de f é uma reta que tem a seguinte forma:



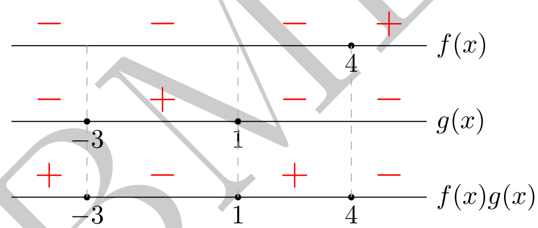
Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -\left(x^2 + 2x - 3\right) \\ &= -\left(x^2 + 2x + 1 - 4\right) \\ &= -\left((x+1)^2 - 2^2\right) \\ &= -(x+1+2)(x+1-2) \\ &= -(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

Assim, g possui raízes iguais a -3 e 1 e, uma vez que o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define g é -1, que é um número negativo, o gráfico de g é uma parábola côncava para baixo. A figura a seguir é um esboço desse gráfico:



Agora, o diagrama abaixo utiliza os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, os quais estudamos acima, para obter o sinal de $f(x)g(x)$:



Desse modo, concluímos que o conjunto-verdade da inequação $(2x-8)\left(-x^2-2x+3\right) \geq 0$ é:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3 \text{ ou } 1 \leq x \leq 4\} \\ &= (-\infty, -3] \cup [1,4]. \end{aligned}$$

Note que o diagrama acima é idêntico ao que foi utilizado para resolver as inequações produto e inequações quociente, pois as regras de sinais continuam válidas. □

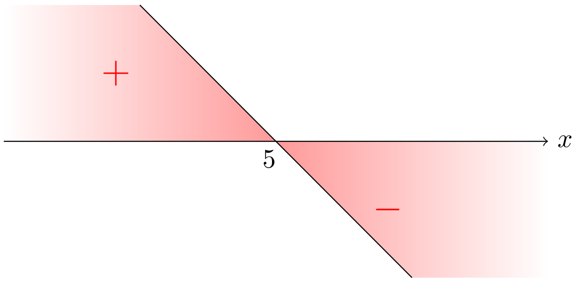
Exemplo 2. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

$$\frac{5-x}{x^2+2x} \leq 0.$$

Solução. Repetindo o raciocínio empregado no exemplo anterior, vamos começar analisando os sinais da função afim $f(x) = 5 - x$ e da função quadrática $g(x) = x^2 + 2x$. Veja que:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longleftrightarrow 5 - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

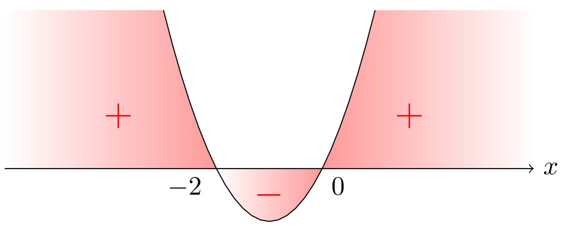
Assim, $f(x)$ tem raiz igual a 5. Como a taxa de variação de $f(x)$ é -1, f é decrescente, logo, o gráfico de f é uma reta que possui a seguinte forma:



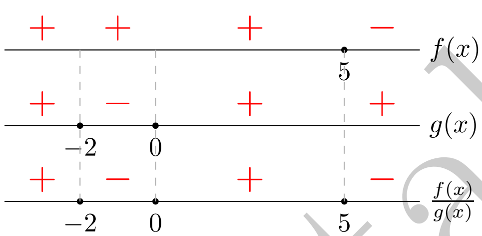
Por outro lado,

$$g(x) = x^2 + 2x = x(x+2),$$

logo, g possui raízes iguais a -2 e 0. Além disso, uma vez que o coeficiente de x^2 na expressão que define g é igual a 1, o gráfico de g é uma parábola côncava para cima. Um esboço dessa parábola está desenhado na figura a seguir:



No diagrama abaixo, utilizamos os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, estudados acima, para obter o sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$:



Logo, tendo o cuidado de excluir os valores de x que anulam o denominador, concluímos que o conjunto-verdade da inequação $\frac{5-x}{x^2+2x} \le 0$ é:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x \ge 5\} \\ &= (-2{,}0) \cup [5, +\infty). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \le 0.$$

Solução. Veja que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} &= \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} + \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x-2+x-3}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

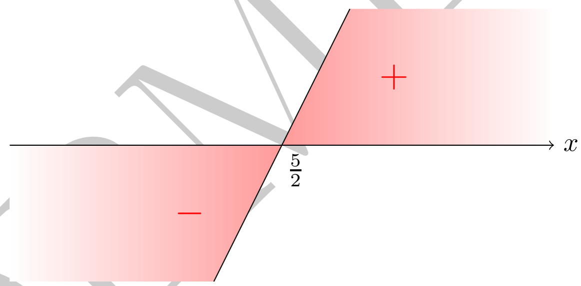
Desse modo, resolver a inequação $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \le 0$ é o mesmo que resolver

$$\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} \le 0.$$

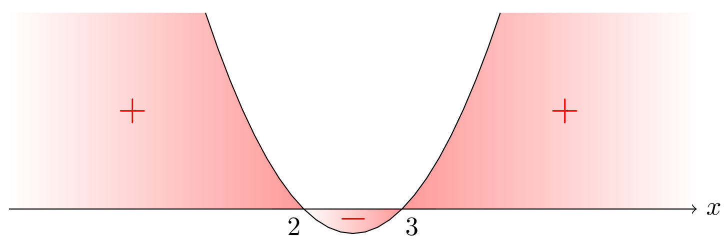
Assim, analisaremos os sinais das funções $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = (x-2)(x-3)$ separadamente. Como

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2x - 5 = 0 \\ &\iff x = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

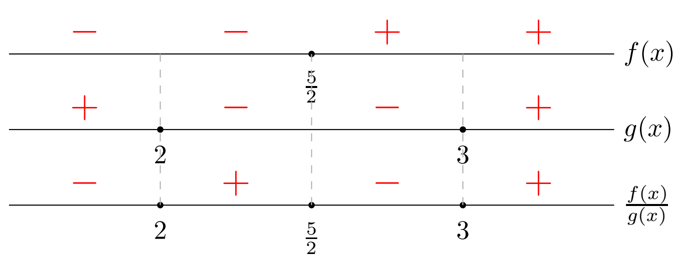
temos que f possui raiz igual a $\frac{5}{2}$. Além disso, uma vez que a taxa de variação de f é igual a 2, que é um número positivo, temos que f é crescente. Assim, o gráfico de f tem a seguinte forma:



Por outro lado,$g(x) = (x-2)(x-3)$ possui raízes iguais a 2 e 3. Ademais, como o coeficiente de x^2 em $g(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ é igual a 1, a parábola que representa o gráfico de g possui concavidade voltada para cima. Veja, na figura abaixo, um esboço do gráfico de g:



O próximo diagrama traz o estudo do sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$ a partir dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$, os quais foram estudados acima.



Concluímos, assim, que o conjunto-verdade da inequação

$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \leq 0$ é

$$V = \{x \in \mathbb{R} | x < 2 \text{ ou } \frac{5}{2} \leq x < 3\}$$
$$= (-\infty,2) \cup \left[\frac{5}{2},3\right).$$

Mais uma vez chamamos a atenção para o fato de que as raízes da função que está no denominador da inequação mista devem ser excluídas do conjunto-verdade, ainda que o símbolo utilizado na inequação não seja de desigualdade estrita. □

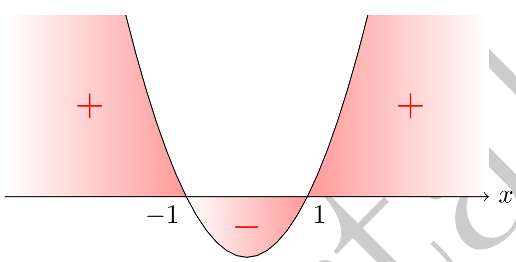
Exemplo 4. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

$$\frac{x^2-1}{x} > 0.$$

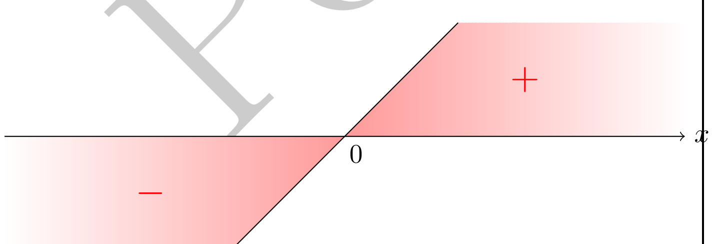
Solução. Mais uma vez, vamos estudar os sinais das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x$. Veja que

$$f(x) = x^2 - 1,$$

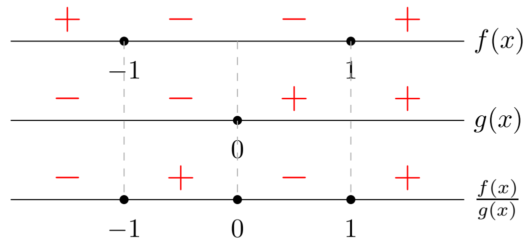
donde concluímos que f possui raízes iguais a -1 e 1. Uma vez que o coeficiente de x^2 em $x^2 - 1$ é igual a 1, a parábola que representa o gráfico de f tem concavidade voltada para cima. A próxima figura mostra um esboço desse gráfico.



Agora, é claro que $g(x) = x$ tem raiz no ponto $x = 0$ e, uma vez que g é uma função linear com taxa de variação positiva, g é crescente. A figura abaixo é um esboço do gráfico de g.



No diagrama abaixo, fazemos o estudo do sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$ tendo como base os estudos dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$, feitos acima:



Desse modo, obtemos o conjunto-verdade da inequação $\frac{x^2-1}{x} > 0$ é igual a:

$$V = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$
$$= (-1,0) \cup (1,\infty).$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

Assim como no material sobre inequações produto e quociente, neste material também optamos por não utilizar fórmulas prontas para encontrar as raízes das funções quadráticas que foram tratadas. Recomendamos que o professor proponha aos alunos que tentem encontrar as raízes utilizando outros métodos.

O professor também deve chamar a atenção dos alunos para o fato de que as raízes das funções (quadráticas ou afins) que apareçam no denominador da inequação não podem pertencer ao conjunto verdade, independentemente do símbolo de desigualdade utilizado.

As leituras complementares a seguir contêm material adicional sobre inequações envolvendo funções quadráticas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.