Material Teórico - Sistemas Lineares e Geometria Analítica

Sistemas com Três Variáveis - Parte 2

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Sistemas com três equações e três variáveis

Dando continuidade ao material passado, vamos analisar sistemas com três equações e três variáveis. Considere o sistema linear seguinte, nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} . \tag{1}$$

Vamos tratar apenas o caso em que, para cada natural i com $1 \leq i \leq 3$, temos que a_i, b_i e c_i não são todos nulos.

Pelo que vimos na primeira seção da Parte 1, cada equação do sistema define um plano em $\mathbb{R}^3$. Vamos chamar de π_1, π_2 e π_3, nesta ordem, os planos definidos pelas equações do sistema acima. Também de modo análogo ao que fizemos na Parte 1, observamos que os pontos (x, y, z) que são soluções do sistema são aqueles que pertencem à interseção desses três planos.

Resolvemos (1) em dois passos, primeiramente identificando a posição relativa apenas entre π_1 e π_2 (usando os métodos da Parte 1 deste material) a fim de determinar o conjunto $\pi_1 \cap \pi_2$, que pode ser vazio, uma reta ou um plano. Em seguida, observamos a relação entre π_3 e $\pi_1 \cap \pi_2$. Ao fazer isso, obtemos um dos seguintes casos:

(a) se $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, não precisaremos nos preocupar com π_3, uma vez que o sistema já será impossível;

(b) se π_1 e π_2 forem coincidentes ($\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$) poderemos ignorar a equação de um deles, por exemplo a de π_2, e terminar analisando a posição relativa entre π_1 e π_3, usando os métodos da Parte 1;

(c) se $\pi_1 \cap \pi_2$ for uma reta, precisaremos estudar a posição relativa entre essa reta e o plano π_3.

Vamos aprender nesta aula o que fazer no último caso acima. Suponha, então, que estamos na situação em que $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta, que chamaremos de r. Na Parte 1 vimos duas maneiras de descrever os pontos de r (veja as soluções do último exemplo daquela parte). Vamos relembrar a segunda maneira: primeiro, encontramos um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) pertencente a r. Em seguida encontramos os vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente. Depois, calculamos seu produto vetorial, $\vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Uma vez que o vetor $\vec{v}$ é paralelo a ambos os planos π_1 e π_2, ele *aponta na direção de* r. Concluímos, pois, que um ponto P pertence a r se, e só se, existe um t real tal que:

$$P = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot \vec{v}. \tag{2}$$

Veja que, na expressão acima, os valores de x_0, y_0, z_0 e $\vec{v}$ podem ser calculados em função dos coeficientes do sistema original. Apenas o valor de t é variável.

Para terminar de resolver o sistema de três equações, resta encontrar para quais valores de t o ponto acima pertence ao plano π_3. Para fazer isso, é suficiente substituir as coordenadas (x, y, z) do ponto P, dadas como em (2), na equação do plano π_3 (a terceira equação em (1)) e encontrar os valores de t que a satisfazem. Assim fazendo, chegaremos a uma das seguintes conclusões:

(c.1) o sistema original é possível e determinado, quando existe um único valor de t;

(c.2) o sistema original é impossível, quando não existe valor real para t;

(c.3) o sistema original é possível e indeterminado, quando existe mais de um valor para t.

Geometricamente, os casos acima podem ser interpretados da seguinte forma (veja a Figura 1):

(c.1) a reta r intersecta o plano π_3 em um único ponto;

(c.2) a reta r está contida em um plano α que é paralelo ao plano π_3;

(c.3) a reta r está contida no plano π_3. Equivalentemente, existem pelo menos dois pontos de r que satisfazem a equação de π_3 (e, logo, todos os pontos de r a satisfazem também).

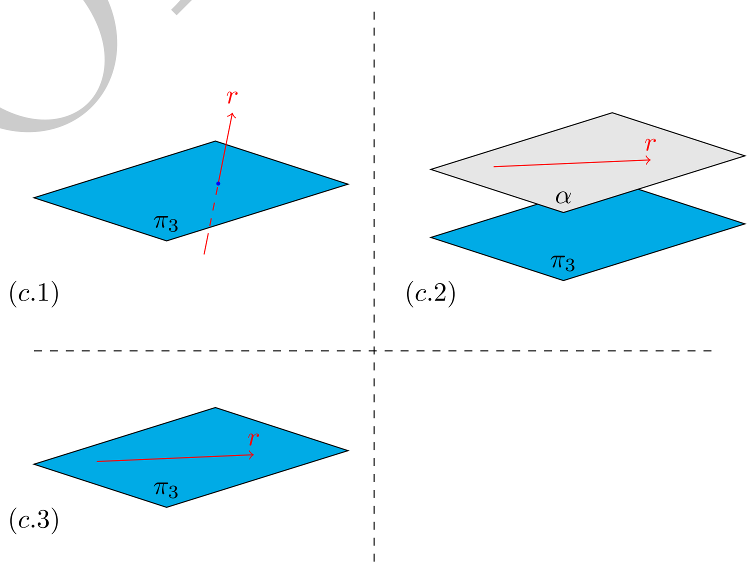


Figura 1: posições relativas entre a reta r e o plano π_3: em (c.1), r e π_3 intersectam-se em um único ponto; em (c.2) eles têm interseção vazia; em (c.3), r está contida em π_3.

Exemplo 1. *Resolva o seguinte sistema linear, interpretando suas equações geometricamente:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 8 \\ x - y + z = 5 \end{cases} .$$

Solução. Sejam π_1, π_2 e π_3 os planos determinados pelas equações do sistema, na ordem em que aparecem no enunciado. Sendo $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, já sabemos que podemos tomar $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ e $\vec{u}_2 = (3, 6, 9)$. Veja que há uma proporcionalidade entre as coordenadas de $\vec{u}_1$ e as de $\vec{u}_2$, pois $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$. Contudo, a razão entre os termos independentes da primeira e da segunda equação é $\frac{2}{8}$ que é diferente de $\frac{1}{3}$. Sendo assim, os planos π_1 e π_2 são paralelos mas não coincidentes (caso (a): $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$). Dessa forma, a interseção desses planos é vazia e o sistema é impossível, independentemente de qual seja o plano π_3. □

Exemplo 2. *Resolva o seguinte sistema linear, interpretando suas equações geometricamente:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 4y + 6z = 20 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Solução. Como na solução do exemplo anterior, denotemos por π_1, π_2 e π_3 os planos determinados pelas equações do sistema, na ordem em que as mesmas aparecem no enunciado. Observe que os coeficientes da primeira e da segunda equação são proporcionais com razão $1/2$, e esta mesma razão é respeitada pelos termos independentes dessas equações ($\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$). Sendo assim, os planos π_1 e π_2 são coincidentes, de sorte que podemos reduzir o sistema a:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 & \text{(plano } \pi_1) \\ 3x - y + 2z = 2 & \text{(plano } \pi_3) \end{cases}. \tag{3}$$

Agora, vamos aplicar o método da Parte 1. Para tanto, observe que $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ e $\vec{u}_3 = (3, -1, 2)$ são vetores normais a π_1 e a π_3, respectivamente, e eles não são proporcionais. Assim, esse sistema possui infinitas soluções, todas pertencentes a uma reta. A fim de descrever essa reta, começamos encontrado uma solução particular do sistema, o que podemos fazer atribuindo um valor qualquer para z e resolvendo o sistema de duas incógnitas assim obtido. Por exemplo, fazendo $z = 1$ obtemos o sistema

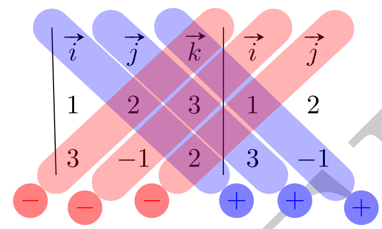
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 0 \end{cases},$$

cuja solução é $x = 1$ e $y = 3$. Sendo assim, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 1)$ é uma solução de (3).

Para terminar, vamos chamar de $\vec{v}$ o produto vetorial de $\vec{u}_1$ por $\vec{u}_3$. De modo similar ao que fizemos na Parte 1, temos

$$\vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ são os vetores canônicos, correspondentes ao sentido positivo ao longo dos eixos x, y e z, respectivamente. Para calcular o determinante acima, usamos a regra da Sarrus, como indicado no diagrama a seguir:



Assim, temos:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 4\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k} - 6\vec{k} + 3\vec{i} - 2\vec{j} \\ &= 7\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}. \end{aligned}$$

Concluímos, então, que a solução geral do sistema original tem a forma

$$(1, 3, 1) + t(7, 7, -7) = (1 + 7t, 3 + 7t, 1 - 7t),$$

onde t é um número real qualquer. Assim, seu conjunto solução é:

$$S = \{(1 + 7t, 3 + 7t, 1 - 7t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Os exemplos seguintes correspondem aos casos em que a interseção de π_1 com π_2 é uma reta.

Exemplo 3. *Resolva o sistema linear abaixo utilizando Geometria Analítica:*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & \text{(plano } \pi_1) \\ 2x - y + 2z = 6 & \text{(plano } \pi_2) \\ 4x + 2y + z = 11 & \text{(plano } \pi_3) \end{cases}.$$

Solução. Sabemos que os vetores $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 2)$, $\vec{u}_3 = (4, 2, 1)$ são normais aos planos π_1, π_2, π_3, respectivamente. Veja também que, para quaisquer dois desses vetores, um não é proporcional ao outro; assim, não podemos reduzir o sistema a um dos casos mais simples (eliminando um dos planos).

Estamos, então, no Caso (c), e para resolver o sistema vamos primeiramente encontrar a reta r, intersecção de π_1 e π_2. Para tanto, procuremos inicialmente uma solução particular (x_0, y_0, z_0) do sistema formado apenas pelas duas primeiras equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & \text{(plano } \pi_1) \\ 2x - y + 2z = 6 & \text{(plano } \pi_2) \end{cases}. \tag{4}$$

Escolhendo (arbitrariamente) $x_0 = 0$, e fazendo $x = x_0 = 0$ nas equações acima, temos que (y_0, z_0) será uma solução do sistema:

$$\begin{cases} y + z = 6 & \text{(plano } \pi_1) \\ -y + 2z = 6 & \text{(plano } \pi_2) \end{cases}.$$

Sendo assim, $y_0 = 2$ e $z_0 = 4$, de modo que obtemos a solução particular $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2, 4)$ do sistema (4). Enfatizamos que essa não precisa ser uma solução particular do sistema original (mas poderia sê-lo); o que sabemos com certeza é apenas que ela é solução do sistema (4). Agora, vamos buscar a solução geral, ainda para o sistema (4). Se $\vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{u_2}$, temos

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} - 2\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j} \\ &= 3\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k} \\ &= (3, 0, -3).\end{aligned}$$

Concluímos então que a solução geral do sistema (4), pode ser obtida variando $t \in \mathbb{R}$ na expressão

$$P_t = (0, 2, 4) + t \cdot (3, 0, -3) = (3t, 2, 4 - 3t).$$

Para terminar, temos de verificar se existem valores reais de t para os quais o ponto P_t acima satisfaz também a terceira equação do sistema original deste exemplo. Substituindo $x = 3t$, $y = 2$ e $z = 4 - 3t$ na equação do plano π_3, obtemos:

$$4 \cdot (3t) + 2 \cdot 2 + (4 - 3t) = 11.$$

Tal equação equivale a $9t = 3$, de sorte que $t = 1/3$. Estamos, então, no Caso (c.1). Isso nos diz que o ponto

$$P_{1/3} = \left(3 \cdot \frac{1}{3}, 2, 4 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) = (1, 2, 3)$$

é a única solução do sistema original. □

Exemplo 4. *Resolva o sistema a seguir usando Geometria Analítica:*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 & \text{(plano } \pi_1) \\ 2x + 2y + z = 1 & \text{(plano } \pi_2) \\ 3x + 3y + 2z = 1 & \text{(plano } \pi_3) \end{cases}.$$

Solução. Vamos primeiro encontrar $\pi_1 \cap \pi_2$, e para tanto começamos observando que $\vec{u}_1 = (1, 1, 2)$ e $\vec{u}_2 = (2, 2, 1)$ são vetores normais a esses planos. Eles não são proporcionais, assim $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta r. Vamos primeiro achar uma solução particular do sistema formado somente pelas duas primeiras equações (ou seja, um ponto particular de $\pi_1 \cap \pi_2$). Para isso, fazendo $x = 0$ nas duas primeiras equações, obtemos

$$\begin{cases} y + 2z = 0 & \text{(plano } \pi_1) \\ 2y + z = 1 & \text{(plano } \pi_2) \end{cases};$$

resolvendo tal sistema, achamos $y = 2/3$ e $z = -1/3$. Assim, o ponto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2/3, -1/3)$ pertence a $\pi_1 \cap \pi_2$. Agora, calculamos o produto vetorial $\vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ a fim de obter a direção da reta r:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 4\vec{i} - \vec{j} \\ &= -3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k} \\ &= (-3, 3, 0).\end{aligned}$$

Dessa forma, a solução geral para o sistema formado pelas duas primeiras equações do sistema original tem a forma

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t\vec{v} \\ &= (0, 2/3, -1/3) + t \cdot (-3, 3, 0) \\ &= (-3t, 2/3 + 3t, -1/3).\end{aligned}$$

Resta ver se alguma dessas soluções também pertence ao plano π_3 e, se for o caso, encontrar todas elas. Para isso, substituímos os valores acima na equação de π_3, obtendo

$$\begin{aligned}3x + 3y + 2z = 1 &\Leftrightarrow 3(-3t) + 3(2/3 + 3t) + 2(-1/3) = 1 \\ &\Leftrightarrow -9t + 2 + 9t - 2/3 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4/3 = 1.\end{aligned}$$

A última afirmação é uma contradição; de outra forma, não importa qual seja o valor de t a equação acima não será satisfeita. Isso quer dizer que a reta r não intersecta o plano π_3 e, portanto, que o sistema original é impossível. (Estamos no Caso (c.2)). □

Exemplo 5. *Resolva o sistema a seguir, utilizando Geometria Analítica:*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 & \text{(plano } \pi_1) \\ 2x + 2y + z = 1 & \text{(plano } \pi_2) \\ 3x + 3y + 3z = 1 & \text{(plano } \pi_3) \end{cases}.$$

Solução. Note que, em comparação com o sistema do exemplo anterior, mudamos apenas a equação do plano π_3. Dessa forma, ainda temos que os pontos da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ possuem a forma

$$(x, y, z) = (-3t, 2/3 + 3t, -1/3).$$

Substituindo as expressões para x, y, z dadas pela igualdade acima na equação de π_3, obtemos:

$$\begin{aligned}3x + 3y + 3z = 1 &\Leftrightarrow 3(-3t) + 3(2/3 + 3t) + 3(-1/3) = 1 \\ &\Leftrightarrow -9t + 2 + 9t - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 = 1.\end{aligned}$$

Desta feita, a última equação acima é satisfeita para qualquer valor de t, o que indica que a reta r está contida no plano π_3. Portando, as soluções do sistema são precisamente todos os pontos de r. (Estamos no Caso (c.3)). □

Dicas para o Professor

Este material é uma continuação dos dois últimos materiais e encerra a série sobre interpretações geométricas de sistemas lineares com três variáveis. Sugerimos que o conteúdo desta última aula seja coberto em dois encontros de 50 min com a resolução de exercícios cobrindo o maior número de casos possíveis. Veja que a regra de Sarrus foi aplicada no cálculo de todos os determinantes 3×3, mas apenas na primeira aplicação desenhamos o diagrama correspondente.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. A Matemática do Ensino Médio, Volume 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.

2. E. L. Lima. Meu Professor de Matemática e outras histórias, sexta edição, Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Matrizes.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.