Material Teórico - Números Inteiros e Números Racionais

Números Inteiros e Operações

Sétimo Ano

Prof. Angelo Papa Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução aos números inteiros

Vamos começar considerando a seguinte situação:

> *Pedro tinha R\$ 10,00. Comprou na venda do Seu Zé um caderno que custa R\$ 8,00 e um pacote de biscoitos que custa R\$ 4,00. Ele deu os 10 reais a Seu Zé, que anotou na sua caderneta os 2 reais que Pedro ficou devendo.*

O que significa a anotação na caderneta do Seu Zé? O preço a pagar pelo caderno e pelo pacote de biscoitos era de $8+4=12$ reais. Como Pedro tinha apenas 10 reais, Seu Zé anotou na caderneta uma **dívida** de 2 reais que Pedro passou a ter com ele.

Se tivesse comprado apenas o caderno, Pedro teria recebido $10-8=2$ reais de troco. Se tivesse comprado apenas o pacote de biscoitos, Pedro receberia $10-4=6$ reais de troco. Como comprou o caderno e o pacote de biscoitos, a operação que corresponde à sua compra é $10-12$.

Para representar a diferença $10-12$, ou seja, a dívida de Pedro, escrevemos -2, onde o sinal "$-$" representa o fato de Pedro não ter recebido troco, mas ter ficado devendo 2 reais a seu Zé. Escrevemos, então,

$$10-12=-2.$$

De um modo geral, na diferença entre dois números naturais, quando o minuendo é maior do que o subtraendo, o resultado da subtração é ainda um número natural.

Exemplo 1. $\underbrace{10}_{minuendo} - \underbrace{8}_{subtraendo} = 2.$

Para que a diferença entre números naturais continue fazendo sentido, mesmo que o minuendo não seja maior do que o subtraendo, precisamos considerar novos números. O **zero**, obtido como o resultado de uma diferença onde minuendo e subtraendo são iguais:

Exemplo 2. $\underbrace{10}_{minuendo} - \underbrace{10}_{subtraendo} = 0$

e os números **inteiros negativos**, obtidos como resultados de diferenças onde o minuendo é menor do que o subtraendo:

Exemplo 3. $\underbrace{10}_{minuendo} - \underbrace{12}_{subtraendo} = -2.$

O conjunto formado pelos números naturais $1,2,3,4,5$, etc (também chamados **inteiros positivos**), pelo número 0 e pelos números inteiros negativos $-1,-2,-3,-4,-5$, etc., é chamado **conjunto dos números inteiros**. Costumamos escrever

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots\} \qquad (1)$$

para denotar esse conjunto. A letra $\mathbb{Z}$ vem da palavra alemão *zahl*, que significa *número*. As reticências $\ldots$ no início e no final da representação (1) indicam que é possível continuar a escrever tantos inteiros quanto desejarmos, para a esquerda ou para a direita.

Se, no dia seguinte, Pedro for à venda do Seu Zé e quitar a dívida, ou seja, pagar os dois reais que estava devendo, Seu Zé riscará a anotação de sua caderneta. Em termos matemáticos, isso pode ser escrito como

$$-2+2=0,$$

o que significa que Pedro passou a dever 0 reais, ou seja, nada, a Seu Zé.

Em geral, podemos dizer que

> para cada número inteiro a existe um número inteiro b tal que a soma dos dois é igual a zero. Esses dois inteiros cuja soma é zero são chamados **simétricos** um do outro.

Por exemplo, 2 e -2 são simétricos um do outro. Também dizemos que -2 é o simétrico de 2 e que 2 é o simétrico de -2. Se $a+b=0$, escrevemos $a=-b$ ou $b=-a$. Juntando essas duas últimas igualdades, vemos que $a=-b=-(-a)$, ou seja, o simétrico do simétrico de um número inteiro é o próprio número.

Um pouco de história: a coleção chinesa de problemas "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática", escrita durante o período da dinastia Han (200 a.C. - 220 d.C.) é considerada um clássico da matemática chinesa. Em seu capítulo 8, há uma explicação de como lidar com números negativos. É certo que esse livro resume uma tradição bem mais antiga e sabe-se que, desde o período da história chinesa conhecido como o dos "Estados Combatentes" (475 a.C. - 221 a.C.) os chineses já usavam a ideia de números negativos para fazerem operações.

O grego Diofanto de Alexandria, que viveu no século III d.C., usava o símbolo ⫛ para indicar os termos de uma expressão que deveriam ser subtraídos, ao invés de somados. Além disso, em seu tratado *Aritmética*, Diofanto trabalha com identidades tais como

$$(a-b)\cdot(c-d)=ac-ad-bc+bd, \qquad (2)$$

onde a, b, c e d são números inteiros. (Explicaremos o significado dessa igualdade na figura 1 e no penúltimo parágrafo antes dela.)

O matemático e astrônomo indiano Brahmagupta (598 - 670) chamava números positivos de "fortuna" e números negativos de "dívidas" e já tinha o conhecimento do número 0.

Os símbolos $+$ e $-$ fizeram sua primeira aparição no livro *Mercantile Arithmetic*, publicado em 1489, na cidade alemã de Leipzig, por Johannes Widman.

O matemático e físico belga Simon Stevin (1548 - 1620), explicou geometricamente a identidade de Diofanto em seu livro *L'arithmétique*[1], de 1585 (veja a figura 1).

[1] Do francês *A Aritmética*.

Nessa figura, a área do retângulo branco é $(a-b)\cdot(c-d)$ e pode também ser calculada retirando-se do retângulo maior (cuja área mede ac) os dois retângulos destacados, cujas áreas medem bc e ad. Nesse processo, a área bd do retângulo menor é retirada duas vezes e precisa ser "reposta". Disso resulta a expressão (2).

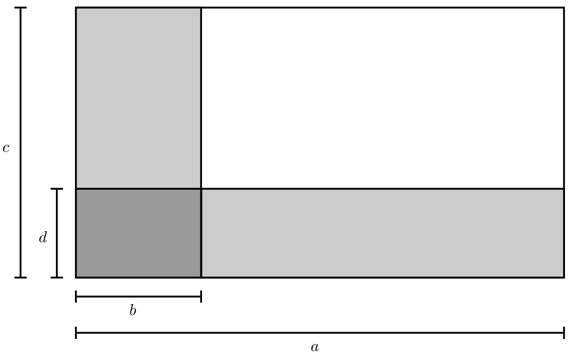

Figura 1: Interpretação geométrica da identidade de Diofanto, 2.

2 A reta numérica

Podemos escrever os números inteiros em uma reta r, orientada da esquerda para a direita, chamada **reta numérica**.

A reta numérica pode ser construída do seguinte modo: primeiro, escolhemos dois pontos da reta r, um ponto que representa o número 0 e outro ponto que representa o número 1 (figura 2). É costume considerar o ponto que representa o número 0 situado à esquerda do ponto que representa o número 1, mas isso é meramente uma convenção.

A seta na extremidade direita da reta r da figura 2 indica que a escolha do ponto que representa o número 1 à direita do ponto que representa o número 0 determina, sobre r uma **orientação**, que é o sentido a ser percorrido para que os números apareçam em ordem crescente.

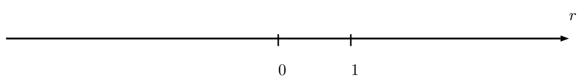

Figura 2: Dois pontos escolhidos sobre uma reta.

A escolha dos pontos que representam 0 e 1 também determina uma **unidade** de medida, que é a distância entre esses pontos. Os pontos sobre a reta r que representam os demais números naturais, $2, 3, 4, 5$, etc., devem ser escolhidos de modo a que a distância entre cada um deles e seus vizinhos, ou seja, os pontos mais próximos que também representam números naturais, seja sempre igual à distância entre os pontos que representam 0 e 1. Por exemplo, marcando na figura 2 os pontos que representam os números 2 e 3, obtemos a figura 3:

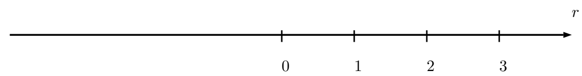

Figura 3: Marcando os pontos de 0 a 3.

Cada número negativo $-n$ é representado pelo ponto que está situado à *esquerda* do ponto que representa 0, à distância até a origem igual àquela do ponto que representa o seu simétrico n (figura 4 – observe que não há relação de *escala* entre as figuras 3 e 4).

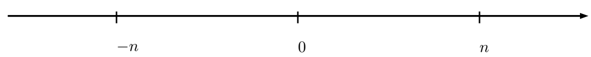

Figura 4: Pontos n e $-n$, simétricos em relação a 0.

Dessa forma, todos os números inteiros correspondem a pontos sobre a reta r que, como já foi dito, é chamada de reta numérica (figura 5). Essa reta é orientada da esquerda para direita, o que significa que um número é maior do que outro se seu ponto correspondente está mais à direita do que o ponto que corresponde ao outro.

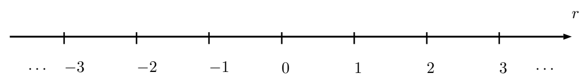

Figura 5: A reta numérica.

Por uma questão de simplicidade, a partir daqui, em vez de escrevermos *ponto que representa* 0, *ponto que representa* 1, etc., escreveremos *ponto* 0, *ponto* 1, etc., o que significa que estamos identificando um ponto com o número que ele representa. O ponto 0 também é chamado **origem** da reta numérica.

Observação 4. *Nem todo ponto da reta r corresponde a um número inteiro. Por exemplo, um ponto situado entre* 0 *e* 1 *não pode representar um inteiro.*

3 Módulo de número inteiro

Com a representação geométrica dos números inteiros construída na seção anterior, podemos estabelecer o seguinte:

a **distância** entre dois números inteiros é a distância, ao longo da reta numérica, entre os pontos que representam esses números. O **módulo** ou **valor absoluto** de um número inteiro n é a sua distância até 0.

Escrevemos $|n|$ para indicar o módulo do número inteiro n.

Exemplo 5. $|17| = 17$, $|-8| = 8$, $|0| = 0$.

Dados um número inteiro $n \neq 0$ e seu simétrico $-n$, um dos dois está à direita de 0 e o outro à esquerda de 0. (Não se deixe enganar pela figura 4. Lá, n representava, *de partida*, um número natural! Contudo, deixando aquela situação de lado, se agora tomarmos $n = -3$, por exemplo, então n será marcado à esquerda do 0, enquanto $-n = 3$ será marcado à direita de 0.) A distância de cada um deles à origem coincide com o número que está à direita de 0.

Exemplo 6. *O número inteiro* 3 *está à direita de* 0 *e seu simétrico,* -3 *está à esquerda de* 0*. A distância de* 3 *e de* -3 *até* 0 *é igual a* 3*.*

Exemplo 7. *O número* -7 *está à esquerda de* 0 *e seu simétrico* 7 *está à direita de* 0*. A distância de* -7 *e de* 7 *até* 0 *é igual a* 7*.*

Em geral, todos os números inteiros negativos estão à esquerda de 0 e todos os números inteiros positivos estão à direita de 0.

Para cada número inteiro n é possível escrever

$$|n| = \begin{cases} n & \text{se} \quad n \geq 0 \\ -n & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

De fato, se $n = 0$, então $|n| = |0| = 0 = n$. Se $n \neq 0$, há dois casos a considerar: se n estiver à direita de 0, isto é, se $n > 0$, então $|n|$ é igual a n; se n estiver à esquerda de 0, isto é, se $n < 0$, então seu simétrico $-n$ estará à direita de 0, de forma que $|n| = -n$, neste caso.

Exemplo 8. *Em Fiscolândia as estradas têm muitos pedágios. Há um pedágio a cada quilômetro e cada pedágio custa 10 cruzetas (a moeda de Fiscolândia é a Cruzeta). Miguel trafega em seu carro conversível por uma estrada reta. Ele acabou de pagar um pedágio e percebeu que leva consigo apenas 80 cruzetas. Por quantos pedágios Miguel ainda pode passar antes que seu dinheiro acabe? Qual é a maior distância que Miguel pode percorrer ao longo da estrada?*

Miguel pode seguir ao longo da estrada em um dos dois sentidos. Assumindo que o pedágio onde Miguel está corresponde ao número 0 *e que o próximo pedágio à direita corresponde ao número* 1*, obtemos uma reta numérica onde cada pedágio corresponde a um número inteiro (veja a figura 6).*

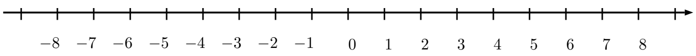

Figura 6: Pedágios na estrada reta.

Como Miguel dispõe de 80 cruzetas após passar pelo pedágio em 0*, ele ainda pode passar por* 8 *pedágios em cada sentido. Assim, ele pode chegar até um dos pedágios situados nos pontos* -9 *ou* 9*, mas não pode ultrapassá-los, pois não terá mais dinheiro quando chegar lá.*

Observação 9. *No que se segue, usaremos as notações:*

- $a > b$ *(lê-se* a é maior que b*) para indicar que* a *está à direita de* b*,*
- $a < b$ *(lê-se* a é menor que b*) para indicar que* a *está à esquerda de* b*.*

É costume também escrevermos $a > b$ *ou* $a = b$ *de modo abreviado como* $a \geq b$ *(lê-se* a é maior ou igual a b*), e* $a < b$ *ou* $a = b$ *de modo abreviado como* $a \leq b$ *(lê-se* a é menor ou igual a b*).*

No exemplo 8, o conjunto dos números que correspondem a pedágios pelos quais Miguel pode passar é

$$P = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Esse conjunto pode ser escrito de modo mais conciso como

$$P = \{n \in \mathbb{Z} \mid -8 \leq n \leq 8\}$$

ou, ainda,

$$P = \{n \in \mathbb{Z} \mid -9 < n < 9\}.$$

Para um número inteiro n, escrever $-9 < n$ é o mesmo que escrever $-8 \leq n$, pois não há números inteiros entre -9 e -8. Assim, o primeiro inteiro à direita de -9 é -8. O mesmo vale em relação às desigualdades $n < 9$ e $n \leq 8$.

Alguns subconjuntos importantes do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros são os seguintes:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

o conjunto dos números inteiros **não negativos**.

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\},$$

o conjuntos dos números inteiros **não positivos**.

Usando a notação $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, podemos escrever

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

para indicar o conjuntos dos inteiros positivos e

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$$

para indicar o conjunto dos inteiros negativos.

4 Adição de números inteiros

Nas seções anteriores, obtivemos uma interpretação geométrica dos números inteiros. Nesta seção, iremos interpretar geometricamente a operação *adição de inteiros*. Com isso, poderemos detectar as propriedades básicas dessa operação.

Vamos interpretar a adição de inteiros como um movimento ao longo da reta numérica, do seguinte modo (veja a figura 7):

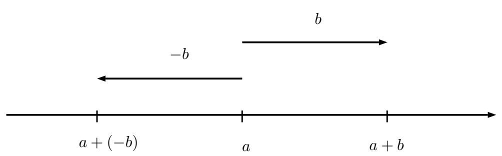

Figura 7: Adição de inteiros.

se a é um número inteiro identificado com um ponto sobre a reta numérica, então

somar $b > 0$ ao número a significa mover o ponto correspondente a a **para a direita** b unidades, de tal modo que a soma $a + b$ esteja associada ao ponto sobre a reta numérica situado b unidades à direita do ponto associado a a.

Exemplo 10. *Se $a = -3$ e $b = 4$, então, para obter $a + b = (-3) + 4$, deslocamos -3 para a direita, 4 unidades. Com o auxílio de uma reta numérica, é fácil concluir que pararemos sobre o número 1, de forma que $(-3) + 4 = 1$.*

Por outro lado,

somar $b < 0$ ao número a significa mover o ponto correspondente a a **para a esquerda**, $|b| = -b$ unidades, de tal modo que a soma $a+b$ esteja associada ao ponto sobre a reta numérica situado $|b|$ unidades à esquerda de a.

Exemplo 11. *Se $a = 5$ e $b = -7$, então, para obter $a+b = 5+(-7)$, deslocamos 5 para a esquerda, $|-7| = 7$ unidades. Novamente com o auxílio de uma reta numérica, é fácil concluir que pararemos sobre o número -2, de forma que $5 + (-7) = -2$.*

Por fim,

somar a com 0 significa mover o ponto a zero unidades, ou seja, não movê-lo. Assim,

$$a + 0 = a.$$

Observe que, de acordo com as regras acima, somar 0 com a significa: deixar o ponto 0 parado, se $a = 0$; mover o ponto 0 para direita a unidades, se $a > 0$; mover o ponto 0 para a esquerda $|a| = -a$ unidades, se $a < 0$. Em qualquer um desses casos, esses movimentos levam o ponto 0 até a posição do ponto a, de modo que

$$0 + a = a.$$

(Veja a figura 8, para o caso em que $a > 0$.)

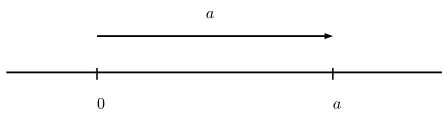

Figura 8: Elemento neutro da adição.

Exemplo 12. $17 + 0 = 0 + 17 = 17$.

Resumimos a discussão acima no seguinte quadro:

para qualquer número inteiro a,

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

O número 0 é chamado **elemento neutro** da adição.

Observando a adição como um movimento, como descrito acima, obtemos as propriedades a seguir.

Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a + b > 0$; Se $a < 0$ e $b < 0$, então $a+b < 0$ é negativo. Por fim, se $a > 0$ e $b < 0$, ou vice-versa, então pode ser $a + b > 0$, $a + b = 0$ ou $a + b < 0$.

Para justificar as afirmações acima, basta observar novamente a figura 7: se $a > 0$, então a já está à direita de 0; somando $b > 0$ a ele, obteremos o ponto $a + b$ à direita de a e, portanto, também à direita de 0. Por outro lado, se $a < 0$, então a está à esquerda de 0; somando $b < 0$ a ele, obteremos o ponto $a + b$ à esquerda de a, logo, também à esquerda de 0. Por fim, se $a > 0$ e $b < 0$ (o outro caso pode ser analisado de maneira análoga), então a está à direita de 0 e, ao somar $b < 0$ ao número a, vamos deslocar a para a *esquerda* $|b|$ unidades; não há como dizer se vamos parar à direita de 0, sobre 0 ou à esquerda de 0 (veja novamente o exemplo 11).

A adição é **associativa**, isto é, se a, b e c são números inteiros, então

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Para justificar a associatividade, vamos supor que $b > 0$ e $c > 0$ (figura 9). Os outros casos (isto é, $b > 0$ e $c = 0$, $b > 0$ e $c < 0$, etc) podem ser analisados de modo análogo.

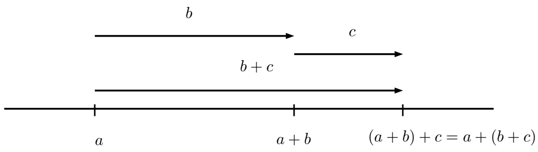

Figura 9: Associatividade da adição.

Somar $b+c$ ao número inteiro a significa movê-lo (para a direita, pois $b+c>0$) $b+c$ unidades, obtendo-se o número $a+(b+c)$. Esse movimento é equivalente àquele de mover a primeiro b unidades para a direita, obtendo-se $a+b$, e, depois, mover $a+b$ para a direita por mais c unidades, obtendo-se o número $(a+b)+c$. Como o ponto obtido ao final dos dois movimentos é o mesmo nos dois casos, devemos ter a igualdade $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Exemplo 13. $2+(5+7)=2+12=14$ *e* $(2+5)+7=7+7=14$.

Até aqui a nossa interpretação da adição de números inteiros dá à primeira e à segunda parcelas de uma soma, *status* diferentes: a primeira parcela é vista como um ponto e a segunda como um movimento ao longo da reta que leva o ponto a uma outra posição. Por outro lado, observamos anteriormente que, para todo inteiro a, é verdadeiro que

$$a+0=0+a.$$

Assim como ocorreu nesse caso, veremos a seguir que os papéis das parcelas de uma adição *sempre* podem ser invertidos sem alterar o resultado.

A adição de números inteiros é **comutativa**, ou seja, se a e b são números inteiros, então

$$a+b=b+a.$$

Sabemos que $a=0+a$. Isto significa que o ponto a pode ser visto como uma seta que começa no ponto 0 e vai até o ponto a (figura 8). Da mesma forma, se a é uma seta, a soma $0+a$ pode ser vista como a ação de movimentar 0, a unidades para esquerda ou direita (conforme o sinal de a).

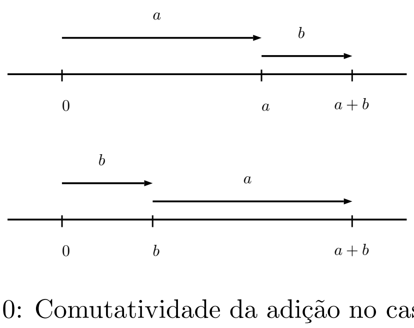

Figura 10: Comutatividade da adição no caso $b>0$.

Observando a figura 10, vemos que movimentar o ponto a para a direita b unidades e movimentar o ponto b para a direita a unidades, são transformações que resultam no mesmo ponto, isto é, $a+b=b+a$. O mesmo se dá quando uma das parcelas, ou mesmo as duas, são negativas (veja a figura 11).

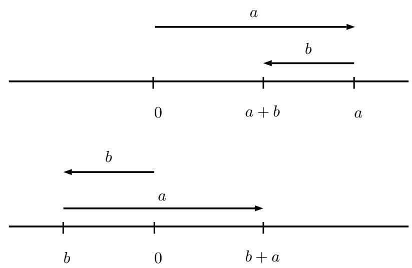

Figura 11: Comutatividade da adição no caso $b<0$.

Exemplo 14. $5+11=16=11+5$.

Outra propriedade fundamental da adição é a existência de um elemento simétrico a cada elemento $a\in\mathbb{Z}$.

Para qualquer número inteiro a,

$$a+(-a)=0.$$

Esta propriedade é consequência da definição de $\mathbb{Z}$, mas daremos a seguir uma justificativa geométrica desse fato.

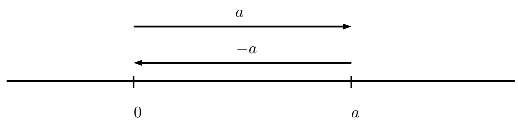

Figura 12: Elementos simétricos.

Os números a e $-a$, vistos como pontos sobre a reta, são simétricos em relação à origem (figura 4). Vistos como setas, elas têm o mesmo tamanho e apontam em sentidos opostos (figura 12). Neste caso, a operação $a+(-a)$ representa o deslocamento do ponto a para a esquerda até o ponto 0, ou seja, $a+(-a)=0$.

Exemplo 15. $7+(-7)=0$.

Observação 16. *Para cada número inteiro, o seu simétrico é único. De fato, se* $a\in\mathbb{Z}$ *e* b *e* c *são simétricos de* a*, então* $b+a=0$ *e* $a+c=0$*. Logo,*

$$\begin{aligned} b &= b+0=b+(a+c) \\ &= (b+a)+c=0+c \\ &= c. \end{aligned}$$

Portanto, dois elementos quaisquer, simétricos de um mesmo número inteiro a, são iguais. *Este fato será utilizado mais adiante, no primeiro parágrafo após a figura 16.*

5 Multiplicação de números inteiros

Nas seções anteriores, vimos que é possível representar geometricamente um número inteiro como um ponto sobre a reta numérica ou como uma seta na direção da reta numérica, que aponta para a direita se o número for positivo ou para esquerda se o número for negativo.

Nesta seção, usaremos a representação de um número inteiro como uma seta para darmos uma interpretação geométrica ao produto de números inteiros.

Multiplicar b por outro número inteiro a significa, por definição,

(1) somar b com ele mesmo a vezes, se $a > 0$, isto é,

$$a \cdot b = \underbrace{b + \cdots + b}_{a \text{ parcelas}}$$

(2) somar $-b$ com ele mesmo $|a|$ vezes, se $a < 0$, isto é,

$$a \cdot b = \underbrace{(-b) + \cdots + (-b)}_{|a| \text{ parcelas}}.$$

O caso em que $a = 0$ será tratado mais adiante.

Exemplo 17. *Multiplicar um número inteiro b por 5 significa calcular a soma*

$$5b = b + b + b + b + b.$$

Por outro lado, multiplicar um número inteiro b por -5 significa somar $-b$ cinco vezes:

$$(-5) \cdot b = (-b) + (-b) + (-b) + (-b) + (-b).$$

Vendo um número inteiro b como uma seta, a figura 13 interpreta geometricamente *os números $5b$ e $(-5)b$:*

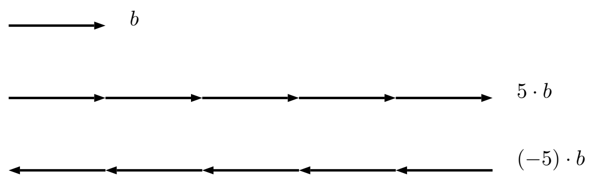

Figura 13: Os números inteiros $b, 5 \cdot b$ e $(-5) \cdot b$.

Em particular, temos o seguinte:

Para todo $b \in \mathbb{Z}$,

$$1 \cdot b = b \text{ e } (-1) \cdot b = -b$$

A propriedade a seguir é chamada de **distributividade da multiplicação em relação à adição**. Ela significa que a multiplicação e a adição são operações compatíveis uma com a outra, ou seja, que o produto de um número inteiro por uma soma de números inteiros pode ser *distribuído*, multiplicando-se o número por cada parcela da soma separadamente.

Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, então

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Dizemos que a multiplicação de inteiros é **distributiva** em relação à adição.

Para ilustrar porque essa propriedade é válida, vamos exibir dois exemplos.

Exemplo 18. *Se $b > 0$ e $c > 0$, a seta b e a seta c podem ser somadas conforme a primeira parte da figura 14, obtendo-se a seta $b + c$. Como a soma é associativa e comutativa, temos:*

$$3(b + c) = (b + c) + (b + c) + (b + c) =$$

$$= (b + b + b) + (c + c + c) = 3b + 3c.$$

Isso equivale a reposicionar as setas que representam b e c, como na segunda parte da figura 14.

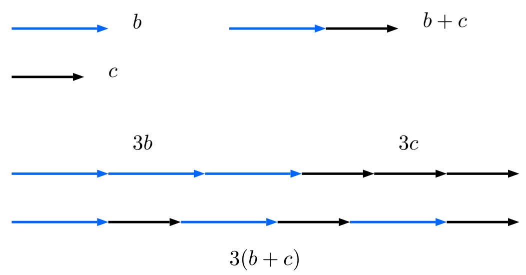

Figura 14: Distributividade da multiplicação em relação à adição quando $b > 0$ e $c > 0$.

Exemplo 19. *Agora, vamos supor que $b > 0$ e $c < 0$. Sendo c negativo, a seta que o representa aponta para a esquerda, e a soma $b{+}c$ corresponde à seta verde da primeira parte da figura 15. Da mesma forma que no exemplo 18, podemos concluir que*

$$3(b + c) = 3b + 3c.$$

A diferença, neste caso, está apenas na interpretação geométrica dessa identidade, conforme a segunda parte da figura 18 deixa claro.

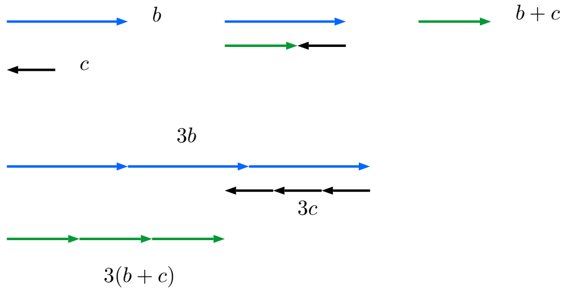

Figura 15: Distributividade com $b > 0$ e $c < 0$.

Se a é um número inteiro diferente de zero, então $a \cdot 0$ é a soma

$$\underbrace{0 + \cdots + 0}_{|a| \text{ parcelas}} = 0.$$

Logo, $a \cdot 0 = 0$. Como veremos a seguir, também vale $0 \cdot b = 0$, para qualquer b inteiro. Isso é consequência do seguinte fato mais geral:

> A multiplicação de números inteiros é **comutativa**, ou seja, se a e b são números inteiros, então
>
> $$a \cdot b = b \cdot a.$$

Em particular, $0 \cdot b = b \cdot 0 = \overbrace{0 + \cdots + 0}^{|b| \text{ parcelas}} = 0$.

Vamos ilustrar a comutatividade da multiplicação de inteiros com um exemplo.

Exemplo 20. *Os produtos* $(-2) \cdot 4$ *e* $4 \cdot (-2)$ *são respectivamente iguais a*

$$(-2) \cdot 4 = (-4) + (-4) = -8$$

e

$$4 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8.$$

Portanto, $(-2) \cdot 4 = 4 \cdot (-2) = -8$ *(figura 16).*

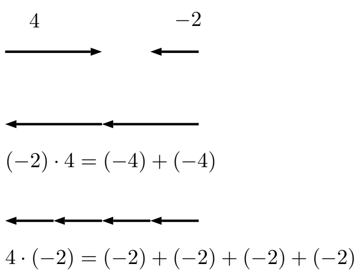

Figura 16: $(-2) \cdot 4 = 4 \cdot (-2)$.

Usando a distributividade, podemos escrever

$$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b) = a \cdot 0 = 0.$$

Isso significa que $a \cdot (-b) + a \cdot b = 0$, ou seja, que $a \cdot (-b)$ é o simétrico de $a \cdot b$. Mas, como vimos na observação 16, o inteiro $a \cdot b$ tem um único simétrico, que, por definição, é o número $-a \cdot b$. Concluímos, então, que

$$a \cdot (-b) = -a \cdot b.$$

Pela comutatividade da multiplicação, temos também $(-a) \cdot b = b \cdot (-a) = -b \cdot a = -a \cdot b$, isto é,

$$(-a) \cdot b = -a \cdot b.$$

Como caso particular, fazendo $a = -1$ e $b = -1$, podemos concluir que

$$(-1) \cdot (-1) = -[1 \cdot (-1)] = -(-1) = 1.$$

Mais geralmente, se a é um número inteiro, então

$$(-a) \cdot (-a) = -a \cdot (-a) = -(-a \cdot a) = a \cdot a.$$

Denotando $a \cdot a$ por a^2 (como com números naturais, lemos *a ao quadrado*), podemos resumir a discussão acima escrevendo

$$a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a).$$

Se $a = 0$, então $a^2 = 0 \cdot 0 = 0$; se $a > 0$, então $a^2 = a \cdot a > 0$; se $a < 0$, então $-a > 0$ e $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$. Portanto, concluímos o seguinte:

> Se a é um número inteiro qualquer, então
>
> $$a^2 \geq 0. \tag{3}$$
>
> Se $a \neq 0$, então $a^2 > 0$.

A multiplicação de números inteiros também tem a seguinte propriedade.

> A multiplicação de números inteiros é **associativa**, ou seja, se a, b e c são números inteiros, então
>
> $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Novamente, vamos ilustrar a propriedade com um exemplo.

Exemplo 21. *A definição de multiplicação e as propriedades da adição nos dão*

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \cdot (-4)) &= 2 \cdot ((-4) + (-4) + (-4)) \\ &= 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) \\ &= (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) \\ &= 6 \cdot (-4) = (2 \cdot 3) \cdot (-4). \end{aligned}$$

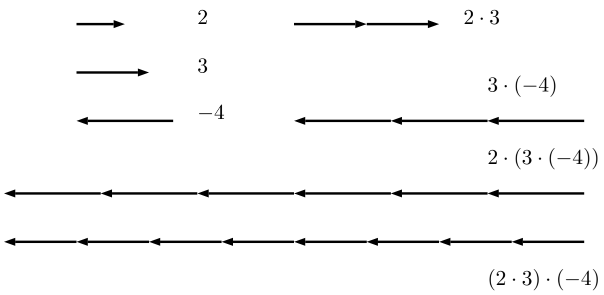

Figura 17: $2 \cdot (3 \cdot (-4)) = (2 \cdot 3) \cdot (-4)$.

Raciocinemos, agora, geometricamente. Na figura 17, as seis setas da penúltima linha representam $2 \cdot (3 \cdot (-4))$. Por outro lado, observando a seta que representa $2 \cdot 3$ (parte superior da figura, à direita), concluímos que as oito setas que aparecem na parte inferior da figura representam $(-4) \cdot (2 \cdot 3)$. Portanto, pela comutatividade da multiplicação, temos

$$2 \cdot (3 \cdot (-4)) = (-4) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (-4).$$

Finalizamos esta seção estendendo aos números inteiros a noção de divisibilidade, já estudada para números naturais.

Dados dois números inteiros a e b, com $a \neq 0$, dizemos que a **divide** b se existe um número inteiro k tal que

$$b = a \cdot k.$$

Neste caso, também dizemos que b é **divisível** por a ou, ainda, que b é **múltiplo** de a. Usamos a notação $a \mid b$ (lê-se "a divide b").

Exemplo 22. *-34 divide 17, uma vez que $-34 = 17 \cdot (-2)$.*

Observação 23. *São equivalentes:*

$$a \mid b, \quad (-a) \mid b, \quad a \mid (-b) \quad e \quad (-a) \mid (-b), \qquad (4)$$

e isso é uma consequência imediata da definição. Por exemplo, se $a \mid b$, então $b = a \cdot k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$; logo,

$$-b = (-a) \cdot k, \quad b = (-a) \cdot (-k) \quad e \quad -b = a \cdot (-k),$$

de forma que $(-a) \mid (-b)$, $(-a) \mid b$ e $a \mid (-b)$.

Da mesma forma mostramos que, se vale uma das quatro relaçoes de divisibilidade (4), então valem as outras três.

Dizemos que um número inteiro n é **par** quando for divisível por 2, ou seja, quando existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Quando um número n não é par, dizemos que ele é **ímpar**. O resto de sua divisão por 2 é igual a 1 e, neste caso, podemos escrever $n = 2k + 1$. A seguir, P e I são respectivamente os conjuntos dos inteiros pares e ímpares:

$$P = \{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\};$$

$$I = \{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}.$$

6 Potenciação de números inteiros

Seja a um número inteiro diferente de 0 e seja n um número inteiro qualquer.

Se $n > 0$, usamos a notação a^n para denotar o produto de n números inteiros iguais a a: $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n}$. A seguir, exibimos uma generalização dessa notação, para expoentes não necessariamente positivos.

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a \cdots a}^{n} & \text{se} \quad n > 0 \\ 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ \underbrace{(1/a) \cdots (1/a)}_{|n|} & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}. \qquad (5)$$

Em qualquer um dos casos acima, chamamos a^n de **potência** com **base** a e **expoente** n.

Exemplos 24.

(a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

(b) $2^{-4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

(c) $7^0 = 1$.

Ainda em relação à definição de a^n, você pode achar um pouco estranho termos colocado $a^0 = 1$. Contudo, veremos na observação 26 que essa escolha tem uma razão de ser muito importante.

Observação 25. *Potências de base 10 são utilizadas para expressar de modo conciso (isto é,* resumido*) números muito grandes ou muito pequenos.*

Na escala dos números muito grandes, o raio do planeta Terra mede, aproximadamente, 10^9cm. O Sol encontra-se a uma distância de $1,5 \cdot 10^{13}$cm da Terra e a distância da Terra a Plutão é de $2 \cdot 10^{15}$cm. Excluindo-se o Sol, a estrela mais próxima está a cerca de $4,5 \cdot 10^{18}$cm da Terra. O diâmetro da nossa galáxia, a Via Láctea, é aproximadamente 10^{23}cm e ela contém cerca de 10^{11} estrelas.

Por outro lado, entre 10^{-3}cm e 10^{-5}cm encontram-se as menores unidades vivas: células, microrganismos, vírus. Entre 10^{-6}cm e 10^{-7}cm estamos no domínio das dimensões moleculares: das maiores proteínas aos átomos. Em dimensões abaixo de 10^{-12}cm entramos na estrutura mais básica da matéria, as partículas subatômicas*: fótons, leptons, mésons, e bárions, classificados em ordem crescente conforme sua massa em repouso.*

A seguir, exibiremos propriedades das potências de base inteira não nula e expoente inteiro:

Se a e b são números inteiros não nulos e p e q são números inteiros quaisquer, então

(1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;

(2) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;

(3) $(a^p)^q = a^{pq}$;

(4) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$;

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.

Observação 26. *Se $a \neq 0$ é um número inteiro, a potência a^0 é igual a 1 por convenção. Esta escolha é feita para que a propriedade* (2) *do quadro anterior continue válida, mesmo quando $p = q$. Realmente, neste caso, temos*

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^p} = 1 \quad e \quad a^{p-q} = a^{p-p} = a^0,$$

de forma que

$$\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} \Leftrightarrow a^0 = 1.$$

Todas as propriedades do quadro anterior são consequências da definição de potência, dada pelas igualdades (5). Vamos dar exemplos que ilustram como cada propriedade pode ser vista como consequência de (5).

Exemplo 27. $5^{-4} \cdot 5^6 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 5^2 = 5^{-4+6}$.

Exemplo 28. $\dfrac{2^3}{2^{-5}} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 2^{3-(-5)}$.

Exemplo 29. $(3^4)^5 = 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{20} = 3^{4 \cdot 5}$.

Exemplo 30. $((-2) \cdot 7)^6 = ((-2) \cdot 7) \cdot ((-2) \cdot 7) \cdot ((-2) \cdot 7) \cdot ((-2) \cdot 7) \cdot ((-2) \cdot 7) \cdot ((-2) \cdot 7) = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (-2)^6 \cdot 7^6$.

Exemplo 31. $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} = ((-2) \cdot 3^{-1})^{-4} \overset{(4)}{=} (-2)^{-4} \cdot (3^{-1})^{-4} \overset{(3)}{=} (-2)^{-4} \cdot 3^{(-1)(-4)} \overset{(3)}{=} (-2)^{-4} \cdot (3^{-4})^{-1} = (-2)^{-4} \cdot \frac{1}{3^{-4}} = \frac{(-2)^{-4}}{3^{-4}}$.

Observação 32. *De acordo com a desigualdade (3), para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, temos $a^2 \geq 0$. Se n é um número inteiro par, então $n = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. De acordo com a propriedade (3) do quadro anterior, temos*

$$a^n = a^{2k} = (a^2)^k \geq 0.$$

Por outro lado, se n é um número inteiro ímpar, então $n = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, logo,

$$a^n = a \cdot \underbrace{a^{2k}}_{\geq 0}.$$

Assim, quando n é ímpar, a^n tem o mesmo sinal de a.

Exemplos 33.

(1) $(-3)^{-8} = 3^{-8} = \frac{1}{3^8} = \frac{1}{6561}$.

(2) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4)^2 = (-4) \cdot 4^2 = -4^3 = -64$.

7 Raízes quadradas revisitadas

Para cada número $b \in \mathbb{Z}$, podemos perguntar se existe um inteiro não negativo a tal que $a^2 = b$. Quando um tal número existe, dizemos que b é um **quadrado perfeito** e a é chamado a **raiz quadrada** de b. Escrevemos $a = \sqrt{b}$ para indicar que a é a raiz quadrada de b.

Uma vez que, por (3), $a^2 \geq 0$, o número inteiro b não pode ser um quadrado perfeito se for negativo. Em outras palavras, se $b \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro que é um quadrado perfeito, então $b \geq 0$, isto é, $b \in \mathbb{Z}_+$. No entanto, existem números positivos que não são quadrados perfeitos. Os onze primeiros quadrados perfeitos são, em ordem crescente,

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.$$

Eles são os quadrados de $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, respectivamente.

Assim, por exemplo, o número 17 não é um quadrado perfeito, pois está entre dois quadrados perfeitos consecutivos: $16 < 17 < 25$.

Uma vez que a raiz quadrada de um quadrado perfeito é um inteiro não negativo, se $a \in \mathbb{Z}_+$, então

$$\sqrt{a^2} = a. \tag{6}$$

Exemplos 34.

(a) $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$*;*

(b) $\sqrt{186624} = \sqrt{432^2} = 432$*;*

(c) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Se observarmos o exemplo (c) acima, vemos que $\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$. Em geral, quando consideramos o quadrado de um número inteiro negativo, a raiz quadrada desse número é o o módulo da base desse número.

O quadro abaixo enbloba todos os casos da raiz quadrada de um quadrado perfeito (isto é, quer a base do quadrado seja positiva, 0 ou negativa:

Para qualquer número inteiro a,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Podemos identificar se um número inteiro $b > 1$ é um quadrado perfeito se soubermos sua decomposição como produto de fatores primos.

Se $b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$, e $b = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ é a fatoração de b como produto de potências de números primos distintos, então b é um quadrado perfeito se, e somente se, cada expoente n_j é par.

De fato, se $n_1, \dots, n_r$ são todos pares, então $n_1 = 2k_1$, $n_2 = 2k_2, \dots, n_r = 2k_r$, onde cada k_j é um número inteiro positivo. Assim,

$$b = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} = p_1^{2k_1} \dots p_r^{2k_r} = \left(p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}\right)^2 = a^2,$$

onde $a = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \in \mathbb{Z}$. Isso mostra que $b = a^2$ é um quadrado perfeito.

Por outro lado, se $b > 1$ é inteiro e $b = a^2$, então $a > 1$ também. Seja $a = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, com $p_1, \dots, p_r$ primos e $k_1, \dots, k_r$ inteiros positivos. Aplicando respectivamente as propriedades (4) e (3) do quadro anterior, temos

$$\begin{aligned} b &= a^2 = (p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r})^2 \\ &= (p_1^{k_1})^2 \dots (p_r^{k_r})^2 \\ &= p_1^{2k_1} \dots p_r^{2k_r}. \end{aligned}$$

Portanto, na decomposição de b como produto de potências de fatores primos distintos, os expoentes de tais primos são $2k_1, \dots, 2k_r$, os quais são, todos, números pares.

Exemplo 35. *O número* $b = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^{12} \cdot 7^{18}$ *é um quadrado perfeito, pois os expoentes de sua representação como produto de potências de primos distintos são todos pares. Além disso,* $a = \sqrt{b} = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^9$.

O número inteiro a*, por sua vez, não é um quadrado perfeito, pois um dos expoentes de sua representação como produto potências de primos distintos é ímpar: o expoente* 9 *do primo* 7.

Dicas para o Professor

As três primeiras seções podem ser cobertas em duas aulas de 50 minutos cada. Exemplos similares à primeira situação exposta na seção 1, onde números negativos aparecem como dívidas, são úteis para que o aluno assimile a noção de número negativo. Vale a pena comentar um pouco sobre a evolução histórica da noção de número negativo, enfatizando que primeiro surgiu a ideia de subtração e só depois os inteiros negativos e o zero foram reconhecidos como números. A referência [3] traz mais informações sobre o número zero e sua história.

Nas seções 2 e 3 enfatize o caráter geométrico dos números negativos, sugerindo aos alunos que imaginem a troca de sinal como uma reflexão em torno do ponto 0. A conexão entre números e pontos sobre uma reta irá se repetir quando o aluno estudar geometria analítica. Caso você trabalhe com uma turma mais adiantada, pode comentar brevemente sobre generalizações da construção feita na seção 2, citando como exemplo um reticulado no plano, cujos pontos podem ser localizados usando-se pares (ordenados) de números inteiros. A definição de módulo como uma distância reforça a importância da interpretação geométrica dos números.

As seções 4 e 5 podem ser vistas em duas aulas com 50 minutos cada. É importante destacar a interpretação das operações entre números inteiros como transformações geométricas. Tenha em mente que as propriedades das operações entre números inteiros são os axiomas que definem a estrutura de anel comutativo com unidade, embora isso não deva ser explicitado aos alunos.

As duas últimas seções podem ser vistas em uma aula de 50 minutos. Uma vez que as propriedades ali estudadas já foram vistas para números naturais, você pode se concentrar nas novidades, que são as potências com expoentes negativos, o módulo visto como a raiz quadrada de um quadrado, e a caracterização de quadrados perfeitos usando-se sua fatoração como produto de primos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. Elon Lages Lima. *Meu Professor de Matemática e outras Histórias.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 1991.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo, Nobel, 1989.

3. Robert Kaplan. *O Nada que Existe – Uma História Natural do Zero.* Rio de Janeiro, Editora Rocco, 2001.

4. Yuri Ivanovich Manin. *Contínuo/discreto, in Enciclopédia Einaudi, vol. 35.* Lisboa, Imprensa Nacional - Casa da Moeda de Portugal, 1998.