

Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

Ângulos - Parte 1

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha

02 de Julho de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Ângulos

Uma região $\mathcal{R}$ do plano é **convexa** se, dados quaisquer dois pontos $A, B \in \mathcal{R}$, tivermos $\overline{AB} \subset \mathcal{R}$. Caso existam pontos $A, B \in \mathcal{R}$ tais que o segmento de reta $\overline{AB}$ não esteja inteiramente contido em $\mathcal{R}$, diremos que a região $\mathcal{R}$ é **não convexa**. Na figura abaixo, temos uma região convexa à esquerda e uma região não convexa à direita.

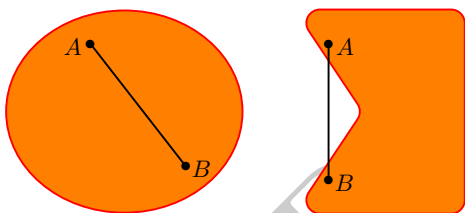


Figura 1: regiões convexas e não convexas.

No plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, de mesma origem O e não opostas, determinam duas regiões, exatamente uma das quais é convexa. Definimos o **ângulo** (ou **ângulo con-**

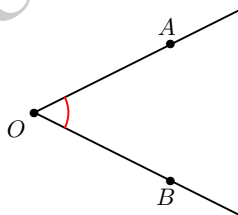


Figura 2: um ângulo $\angle AOB$ no plano.

vexo) $\angle AOB$ como a região convexa do plano delimitada

por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. O ponto O é denominado o **vértice** e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os **lados** do ângulo $\angle AOB$.

Se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ forem semirretas opostas, então as regiões em que o plano fica dividido por $\overleftrightarrow{AB}$ são os dois semiplanos definidos pela reta $\overleftrightarrow{AB}$. Nesse caso, em princípio o **ângulo** $\angle AOB$ poderia ser definido como uma qualquer dessas duas regiões. Porém, se quisermos evitar ambigüidades, podemos marcar um ponto adicional X em um dos dois semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ e referirmo-nos ao *ângulo* $\angle AOB$ que contém o ponto X .

Ainda no contexto de um ângulo $\angle AOB$, trace um círculo qualquer Λ (lê-se *Lâmbda*) de centro O e o divida em 360 arcos iguais. Se os pontos A e B forem as extremidades de um desses 360 arcos, dizemos que a **medida** de $\angle AOB$ é um **grau**, e denotamos

$$A\hat{O}B = 1^\circ.$$

Como um ângulo de 1° corresponde a um arco que mede $\frac{1}{360}$ do círculo Λ , temos que o círculo completo corresponde a 360° . Assim (acompanhe na figura 3), se o comprimento de um arco $\widehat{AB}$ for $\frac{1}{8}$ do comprimento de Λ , a medida de $\angle AOB$ será

$$A\hat{O}B = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ.$$

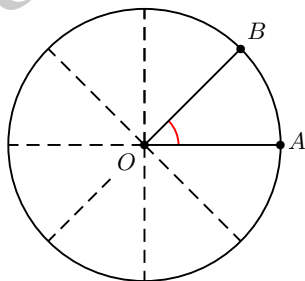


Figura 3: um ângulo $\angle AOB$ de 45° .

Se o comprimento do arco $\widehat{AB}$ for $\frac{1}{4}$ do comprimento do círculo completo, teremos um ângulo $\angle AOB$ cuja medida vale $\widehat{AOB} = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$. Um ângulo que mede 90° também é chamado de **ângulo reto**.

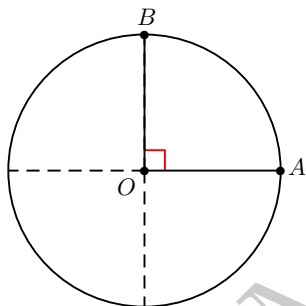


Figura 4: um ângulo $\angle AOB$ reto.

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado nos dois casos acima, se o segmento de reta $\overline{AB}$ é um diâmetro de Λ , então, tendo em vista que os extremos de um diâmetro dividem o círculo em dois arcos de mesmo comprimento, concluímos que o ângulo $\angle AOB$ mede $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Um ângulo que mede 180° é chamado de **ângulo raso**.

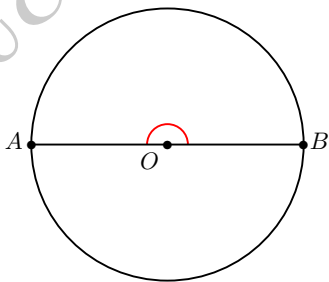


Figura 5: um ângulo raso.

Dizemos que dois ângulos são **congruentes** (ou **iguais**) se suas medidas forem iguais.

Doravante, sempre que for conveniente, utilizaremos as letras gregas minúsculas α (lê-se *alfa*), β (lê-se *beta*), γ (lê-se *gama*), θ (lê-se *téta*), etc para representar medidas de ângulos.

Um ângulo $\angle AOB$ de medida $\widehat{AOB} = \alpha$ é dito **agudo** se $0 < \alpha < 90^\circ$ e **obtusos** se $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. As figuras 6 e 7 ilustram ângulos $\angle AOB$ que são respectivamente agudo e obtuso.

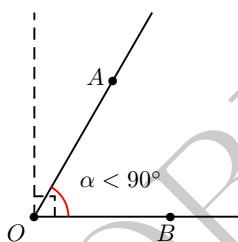


Figura 6: um ângulo $\angle AOB$ agudo.

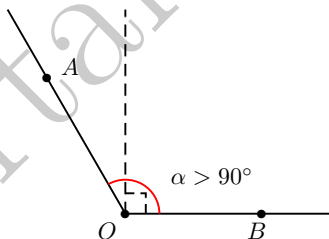


Figura 7: um ângulo $\angle AOB$ obtuso.

2 Ângulos consecutivos, adjacentes, complementares e suplementares.

Dizemos que dois ângulos são **consecutivos** se possuem um lado em comum. Por exemplo, na figura 8, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são consecutivos.

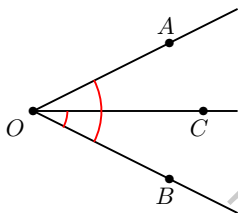


Figura 8: os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são consecutivos.

Observe, contudo, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ da figura 8, apesar de serem consecutivos, não possuem apenas uma semirreta em comum. De fato, neste caso, temos $\angle BOC \subset \angle AOB$. Quando dois ângulos consecutivos possuírem apenas uma semirreta em comum, eles serão chamados de ângulos **adjacentes**. Assim, por exemplo, os ângulos $\angle AOC$ e $\angle BOC$ da figura 9 são (consecutivos e) adjacentes.

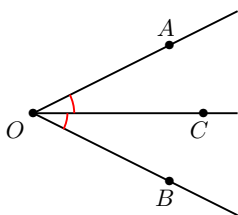


Figura 9: os ângulos $\angle AOC$ e $\angle BOC$ são adjacentes.

Dois ângulos de medidas α e β são **complementares** se

$\alpha + \beta = 90^\circ$ e **suplementares** se $\alpha + \beta = 180^\circ$. Em palavras, a soma das medidas de dois ângulos complementares é igual à medida de um ângulo reto, ao passo que a soma das medidas de dois ângulos suplementares é igual à medida de um ângulo raso.

Na figura 10, os ângulos adjacentes $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são, claramente, complementares.

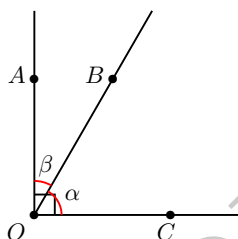


Figura 10: ângulos adjacentes complementares.

Por outro lado, a figura 11 mostra ângulos (também adjacentes) $\angle AOB$ e $\angle BOC$ que são suplementares.

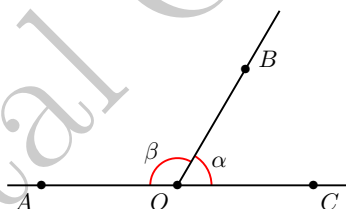


Figura 11: ângulos adjacentes suplementares.

3 Ângulos opostos pelo vértice, bissetriz de um ângulo

Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$, que possuem o mesmo vértice O , são **opostos pelo vértice** (abreviamos **OPV**) se seus

lados forem pares de semirretas opostas. Assim, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da figura 12, haja vista que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semirretas opostas, o mesmo ocorrendo com as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$.

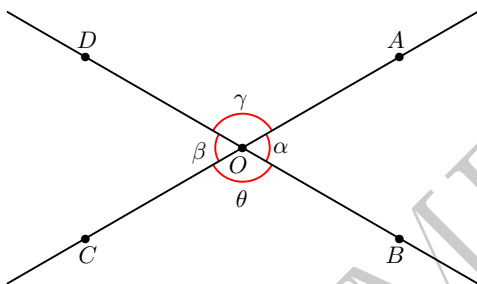


Figura 12: ângulos opostos pelo vértice.

Observando a figura 12, concluímos que, uma vez que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são opostas, o ângulo $\angle AOC$ é raso. Desse modo, os ângulos adjacentes $\angle AOD$ e $\angle DOC$ são suplementares, ou seja,

$$\gamma + \beta = 180^\circ.$$

De modo análogo, os ângulos adjacentes $\angle DOA$ e $\angle AOB$ também são suplementares, de forma que

$$\gamma + \alpha = 180^\circ.$$

Em particular, concluímos que $\gamma + \beta = \gamma + \alpha$ e, então, que

$$\beta = \alpha.$$

Analogamente, como $\angle AOD$ e $\angle BOC$ também são OPV, temos $\gamma = \theta$.

Em palavras, mostramos a seguinte propriedade importante de ângulos OPV:

ângulos OPV possuem medidas iguais.

A **bissetriz** de um ângulo $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que divide $\angle AOB$ em dois ângulos de medidas iguais. Nas notações da figura 13, supondo que $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \alpha$, temos que $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

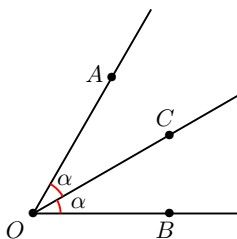


Figura 13: a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

O exemplo a seguir relaciona as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice.

Exemplo 1. *Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.*

Prova. Nas notações da figura 14, sejam $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ as bissetrizes dos ângulos opostos pelo vértice $\angle AOB$ e $\angle COD$ (observe que tal figura já utiliza a igualdade das medidas de ângulos OPV).

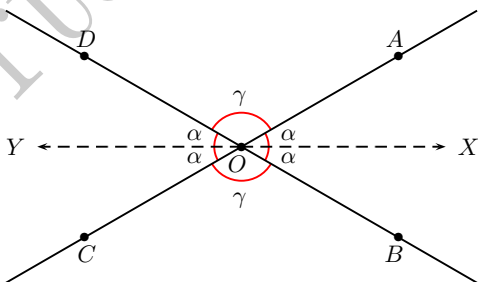


Figura 14: bissetrizes de dois ângulos OPV.

Então, por um lado, temos

$$X\hat{O}A + A\hat{O}D + D\hat{O}Y = \alpha + \gamma + \alpha = 2\alpha + \gamma.$$

Por outro, temos claramente $4\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, de forma que $2\alpha + \gamma = 180^\circ$. Então, $\angle XOY$ é um ângulo raso, de forma que $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ são, realmente, semirretas opostas. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para a primeira seção que compõe esse material, e uma seção adicional de 50min para as outras duas seções. Na seção 1, procure destacar os conceitos de região convexa e não convexa, para que o conceito de ângulo convexo seja bem entendido. Na seção 2, utilize desenhos para ilustrar que a união de dois ângulos adjacentes e complementares forma um ângulo reto, enquanto a união de dois ângulos adjacentes e suplementares forma um ângulo raso. Finalmente, na seção 3, é muito importante que os alunos compreendam que ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida. Esse fato será utilizado várias vezes em aulas posteriores.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora da SBM, 2022.
2. A. Caminha. *Geometria*, segunda edição. Rio de Janeiro, Editora da SBM, 2024.
3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.