Material Teórico - Módulo Números Naturais: Representação, Operações e Divisibilidade

Múltiplos e Divisores - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de setembro de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, apresentamos algumas propriedades e exemplos que envolvem múltiplos e divisores de números naturais.

Exemplo 1. *Mostre que se* m *e* n *são números naturais que deixam restos* r *e* s *quando são divididos por* 3*, então o resto da divisão de* $m+n$ *por* 3 *é o mesmo resto da divisão de* $r+s$ *por* 3*.*

Solução. Na divisão de m por 3, o resto é r, logo, existe um número natural q tal que $m = 3q + r$. Analogamente, uma vez que na divisão de n por 3 o resto é s, existe um número natural k tal que $n = 3k + s$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} m+n &= (3q+r)+(3k+s) \\ &= 3q+3k+r+s \\ &= 3(q+k)+r+s. \end{aligned}$$

Assim, como $m+n$ é a soma de um múltiplo de 3 e $r+s$, as divisões de $m+n$ e de $r+s$ por 3 deixam o mesmo resto. □

Exemplo 2. *Mostre que se* m *e* n *são números naturais que deixam restos* r *e* s *quando são divididos por* 3*, então o resto da divisão de* mn *por* 3 *é o mesmo resto da divisão de* rs *por* 3*.*

Solução. Na divisão de m por 3, o resto é r, logo, existe um número natural q tal que $m = 3q + r$. Analogamente, uma vez que na divisão de n por 3 o resto é s, existe um número natural k tal que $n = 3k + s$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} mn &= (3q+r)(3k+s) \\ &= 9qk+3qs+3kr+rs \\ &= 3(3qk+qs+kr)+rs. \end{aligned}$$

Assim, como mn é a soma de um múltiplo de 3 e rs, as divisões de mn e de rs por 3 deixam o mesmo resto. □

Exemplo 3. *Mostre que na divisão de um quadrado perfeito por* 3 *o resto nunca é igual a* 2*.*

Solução. Seja $a = n^2$ um quadrado perfeito. Quando dividimos n por 3, as possibilidades para o resto são 0, 1 ou 2. De acordo com o problema 2, se a divisão de n por 3 deixa resto 0, então a divisão de $n^2 = n \cdot n$ por 3 deixa resto $0 \cdot 0 = 0$; se a divisão de n por 3 deixa resto 1, então a divisão de $n^2 = n \cdot n$ por 3 deixa resto $1 \cdot 1 = 1$ e, se a divisão de n por 3 deixa resto 2, então a divisão de $n^2 = n \cdot n$ por 3 deixa o mesmo resto que a divisão de $2 \cdot 2 = 4$ por 3, ou seja, o resto na divisão de n^2 por 3 é igual a 1. Portanto, concluímos que um quadrado perfeito nunca deixa resto 2 quando dividido por 3 $\square$

Exemplo 4. *Se abc é um número de três algarismos, mostre que os restos nas divisões de abc e $a + b + c$ por 3 são iguais. Em particular, abc é múltiplo de 3 se, e somente se, $a + b + c$ é múltiplo de 3.*

Solução. Veja que

$$\begin{aligned} abc &= 100a + 10b + c \\ &= 99a + a + 9b + b + c \\ &= 99a + 9b + a + b + c \\ &= 3(33a + 3b) + a + b + c. \end{aligned}$$

Assim, como abc é a soma de $a + b + c$ e um múltiplo de 3, esses números deixam o mesmo resto quando divididos por 3. Em particular o resto da divisão de abc por 3 é igual a 0 se, e somente se, o resto da divisão de $a + b + c$ por 3 é 0, ou seja, abc é múltiplo de 3 se, e somente se, $a + b + c$ é múltiplo de 3. $\square$

Observação 5. *Veja que se abcd é um número de quatro algarismos, podemos escrever*

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 999a + a + +99b + b + 9c + c + d \\ &= 999a + 99b + 9c + a + b = c + d \\ &= 3(333a + 33b + 3c) + a + b + c + d. \end{aligned}$$

Desse modo, repetindo o raciocínio utilizado no exemplo 4, concluímos que os restos das divisões de $abcd$ e $a+b+c$ por 3 são iguais. De fato, seguindo a mesma ideia, mostra-se que o resto da divisão de qualquer número natural n por 3 é igual ao resto da divisão da soma dos algarismos de n por 3. Agora, observando que

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 999a + a + +99b + b + 9c + c + d \\ &= 999a + 99b + 9c + a + b = c + d \\ &= 9(111a + 11b + 3c) + a + b + c + d, \end{aligned}$$

concluímos que tudo que foi afirmado na discussão anterior continua válido se trocarmos "divisão por 3" por "divisão por 9", ou seja, o resto da divisão de qualquer número natural n por 9 é igual ao resto da divisão da soma dos algarismos de n por 9. Em particular, um número natural é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é múltiplo de 9.

Exemplo 6. *Considere o número natural de seis algarismos $m = 569a9b$. Sabendo que m é múltiplo de 45, concluímos que $a+b$ é igual a*

(a) *1.*

(b) *5.*

(c) *7.*

(d) *9.*

(e) *16.*

Solução. O número m é múltiplo de $45 = 5 \cdot 9$, logo, m é múltiplo de 5 e de 9. Como m é múltiplo de 5, temos que

$$b = 0 \text{ ou } b = 5.$$

Utilizaremos agora o fato de que um número natural é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é múltiplo de 9. Se $b = 0$, a soma dos algerismos de m é igual a

$$5 + 6 + 9 + a + 9 + 0 = 29 + a.$$

Assim, para que essa soma seja um múltiplo de 9, devemos ter

$$29 + a = 36 \Longrightarrow a = 7.$$

Se $b = 5$, então a soma dos algarismos de n é

$$5 + 6 + 9 + a + 9 + 5 = 34 + a.$$

Logo, uma vez que essa soma deve ser um múltiplo de 9, obtemos

$$34 + a = 36 \Longrightarrow a = 2.$$

Portanto, $b = 0$ e $a = 7$ ou $b = 5$ e $a = 2$. Em ambos os casos, obtemos

$$a + b = 7.$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(c)**. $\square$

Exemplo 7. *Se abcd é um número natural de quatro algarismos, mostre que os restos das divisões de abcd e $(b+d)-(a+c)$ por 11 são iguais. Em particular, abcd é múltiplo de 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares é múltiplo de 11.*

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 10001a - a + 99b + b - 11c - c + d \\ &= 1001a + 99b + 11c + (b + d) - (a + c) \\ &= 11(91a + 9b + c) + (b + d) - (a + c). \end{aligned} \tag{1}$$

Assim, como $11(91a + 9b + c)$ é múltiplo de 11, os restos das divisões de $abcd$ e $(b + d) - (a + c)$ por 11 são iguais. $\square$

Observação 8. *A discussão apresentada no exemplo 7 pode ser estendida a um número natural n qualquer, não importando a quantidade de algarismos de n. De fato, para encontrar o resto da divisão de n por 11, basta calcular a diferença entre as somas dos algasirmos das ordens ímpares e das ordens pares de n e depois encontrar o resto da divisão dessa diferença por 11.*

Exemplo 9. *Quantos múltiplos de* 5 *há entre* 27 *e* 213*?*

Solução. Vamos encontrar a quantidade de múltiplos de 5 entre 1 e 27 e entre 1 e 213. Assim, a quantidade de múltiplos de 5 entre 27 e 213 será dada pela diferença dos dois anteriores. Com efeito, temos

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|l} 213 & 5 \\ \cline{2-2} 13 & 42 \\ 3 & \end{array}$$

Logo, há 5 múltiplos de 5 entre 1 e 27 e 42 múltiplos de 5 entre 1 e 213. Portanto, há $42 - 5 = 37$ múltiplos de 5 entre 27 e 213. □

Observação 10. *Outra solução para o exemplo 9 consiste em encontrar o menor múltiplo de* 5 *maior que* 27 *– que é* 30 *– e o maior múltiplo de* 5 *menor que* 213 *– que é* 210 *–. Daí, basta encontrar a quantidade de múltiplos de* 5 *desde* 30 *até* 210*. Para isso, encontramos os quocientes das divisões de* 210 *e* 30 *por* 5 *e, por fim, calculamos a quantidade de inteiros consecutivos desde o menor até o maior desses quocientes. Com efeito, temos*

$$\begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 5 \\ \cline{2-2} 10 & 42 \\ 0 & \end{array}$$

e

$$42 - 6 + 1 = 37.$$

Exemplo 11. *Em um terminal de ônibus do Recife, os ônibus das 4 (quatro) linhas municipais saem diariamente, de acordo com os seguintes intervalos de tempo, apresentados no quadro abaixo:*

Linhas Municipais	Intervalos de Saída
A	10 em 10 minutos
B	12 em 12 minutos
C	15 em 15 minutos
D	25 em 25 minutos

Assim, se em um dia qualquer da semana os ônibus das 4(quatro) linhas saírem pontualmente às 7h15min da manhã, qual será o próximo horário, deste mesmo dia, no qual os ônibus dessas linhas sairão novamente ao mesmo tempo?

(*a*) *9h.*

(*b*) *9h30min.*

(*c*) *9h15min.*

(*d*) *12h.*

(*e*) *12h15min.*

Solução. Como os ônibus da linha **A** saem de 10 em 10 minutos, os da linha **B** de 12 em 12 minutos, os da linha **C** de 15 em 15 minutos e os da linha **D** de 25 em 25 minutos, os intervalos de tempo, em minutos, transcorridos de 7h15min até os horários de partida dos ônibus da linha **A** são formados pelos múltiplos de 10, até os horários de partida dos ônibus da linha **B** são formados pelos múltiplos de 12, até os horários de partida dos ônibus da linha **C** são formados pelos múltiplos de 15 e até os horários de partidas dos ônibus da linha **D** são formados pelos múltiplos de 25. Logo, o intervalo de tempo transcorrido entre 7h15min e o próximo horário em que os ônibus das quatro linhas sairão juntos novamente é, em minutos, igual a $\operatorname{mmc}(10,12,15,25)$. Calculando esse mmc, obtemos:
Agora, veja que

$$\begin{array}{r|l} 3\,0\,0 & 6\,0 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
10{,}12{,}15{,}25 & 2 \\
5{,}6{,}15{,}25 & 2 \\
5{,}3{,}15{,}25 & 3 \\
5{,}1{,}5{,}25 & 5 \\
1{,}1{,}1{,}5 & 5 \\
1{,}1{,}1{,}1 & \\
\hline
 & 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300.
\end{array}
$$

Assim, ônibus dessas linhas sairão novamente ao mesmo tempo às 7h15min + 5h = 12h15min. Desse modo, a alternativa correta é a da letra **(e)**. □

Exemplo 12 (CMRJ). *Dona Ivani vendia ovos de galinhas caipiras na feira. Em um dia de bastante movimento, dois alunos do Colégio Militar, distraídos com uma conversa animada, esbarraram em sua barraca, derrubando-a e quebrando todos os ovos. Os dois, prontamente, pediram desculpas e se ofereceram para pagar o prejuízo de dona Ivani. A senhora, muito simpática, lembrou-se dos seus tempos de estudante e do quanto se divertia com os desafios matemáticos. Então, propôs aos dois um problema aritmético: "O número total de ovos quebrados foi maior que 200 e menor que 400. Se eu contar de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro, de cinco em cinco e de seis em seis, sempre sobrará um. Mas se eu contar de sete em sete, não sobrará nenhum. Eu vendo 7 ovos por R\$ 8,50. Quanto vocês me devem ao todo pelos ovos quebrados?"*

(a) *R\$ 325,50.*

(b) *R\$ 340,00.*

(c) *R\$ 365,50.*

(d) *R\$ 370,00.*

(e) *R\$ 385,50.*

Solução. Se ao contar a quantidade de ovos de dois em dois, três em três, quatro em quatro, cinco em cinco e seis em seis, não restasse nenhum ovo, a quantidade de ovos seria um múltiplo comum a dois, três, quatro, cinco e seis. Como resta um ovo ao contar de dois em dois, três em três, quatro em quatro, cinco em cinco e seis em seis, essa quantidade deve ser um múltiplo comum a dois, três, quatro, cinco e seis, adicionado de uma unidade. Sabemos que os múltiplos comuns a dois, três, quatro, cinco e seis são os múltiplos do mmc desses números. Assim, a quantidade de ovos quebrados deve ser um múltiplo de $\text{mmc}\,(2{,}3{,}4{,}5{,}6)$ que, quando adicionado a 1, esteja entre 200 e 400. Veja que $\text{mmc}\,(2{,}3{,}4{,}5{,}6) = \text{mmc}\,(4{,}5{,}6) = 60$, pois

$$\begin{array}{r|l}
4{,}5{,}6 & 2 \\
2{,}5{,}3 & 2 \\
1{,}5{,}3 & 3 \\
1{,}5{,}1 & 5 \\
1{,}1{,}1 & \\
\hline
 & 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.
\end{array}$$

Desse modo, a quantidade de ovos quebrados pode ser $4 \cdot 60 + 1 = 241$, $5 \cdot 60 + 1 = 301$ ou $6 \cdot 60 + 1 = 361$. Por outro lado, Dona Ivani disse que se contasse a quantidade de ovos de sete em sete, não sobraria nenhum. Logo, essa quantidade deve ser múltiplo de sete. Uma vez que

$$\begin{array}{r|l}
2\,4\,1 & 7 \\ \cline{2-2}
3\,1 & 3\,4 \\
3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3\,0\,1 & 7 \\ \cline{2-2}
2\,1 & 4\,3 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3\,6\,1 & 7 \\ \cline{2-2}
1\,1 & 5\,1 \\
4 &
\end{array}$$

concluímos que foram quebrados 301 ovos. Finalmente, veja que $301 = 43 \cdot 7$ e, como 7 ovos custam R\$ 8,50, o total devido pelos alunos é

$$43 \cdot 8{,}50 = 365{,}50.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(c)**. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Nos exemplos que tratam de mmc, explique aos alunos o porquê de o número procurado ser o mmc. Evite falar coisas do tipo: "quando aparecer a palavra mínimo, a solução do problema passará pelo cálculo de algum mmc", pois isso não é verdade!

Nas referências a seguir você poderá aprofundar o conhecimento adquirido nesta aula.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo, Nobel, 1989.