Material Teórico - Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas

Redução ao Primeiro Quadrante

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de janeiro de 2019

1 Redução ao Primeiro Quadrante

Nó módulo "Círculo Trigonométrico", também do primeiro ano, aprendemos que esse círculo é aquele de raio 1 com centro na origem, o ponto $O = (0{,}0)$, do plano cartesiano. Consideramos o ponto $A = (1{,}0)$ e, dado um comprimento β de um arco, marcamos o ponto P sobre o círculo trigonométrico tal que $\widehat{AP}$ mede β. Assim fazendo, definimos os números $\cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta$ de tal sorte que

$$P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta). \tag{1}$$

Note que, aqui, escrevemos simplesmente $\operatorname{sen}\beta$ no lugar de $\operatorname{sen}(\beta)$, apenas pelo fato de a primeira notação ser mais compacta. Ambas essas notações têm o mesmo significado, mas a primeira deve ser usada com cautela, especialmente em expressões longas, para não haver risco de ambiguidades.

Quando $0 < \beta < \pi/2$, podemos construir um triângulo retângulo com um ângulo interno de medida β radianos e, portanto, com os outros dois ângulos internos medindo $\pi/2$ e $\pi/2 - \beta$ (lembre-se de que $\pi/2$ radianos corresponde a $90°$).

Conforme estudado no módulo "Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente" do Nono Ano do EF, em um tal triângulo temos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\cos\beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}.$$

Ademais, se escolhermos tal triângulo de modo que a medida de sua hipotenusa seja igual a 1, teremos $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$ como as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a β, respectivamente. A Figura **??**, mostra como escolher tal triângulo fazendo com que sua hipotenusa coincida com um raio do círculo trigonométrico.

Contudo, quando β *não* pertence ao intervalo aberto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, não existe triângulo retângulo com um ângulo interno de medida β radianos. Neste caso, podemos usar a técnica de redução ao primeiro quadrante para calcular o seno, o cosseno e a tangente de β. Essa técnica já foi esboçada no módulo Círculo Trigonométrico, mas a repetiremos aqui adicionando mais detalhes e exemplos. A ideia é, a partir de β, obter um certo ângulo α entre 0 e $\pi/2$ e relacionar os valores de $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$ com os de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

Lembre-se de que os eixos do plano cartesiano dividem o Círculo Trigonométrico em quatro partes. Cada parte é denominada um *quadrante* e, por convenção, os quadrantes são numerados de I até IV (um até quatro em algarismos romanos, respectivamente) em sentido anti-horário, sendo o primeiro quadrante aquele formado pelos pontos em que ambas as coordenadas são positivas (veja os numerais I, II, III, IV na Figura **??**).

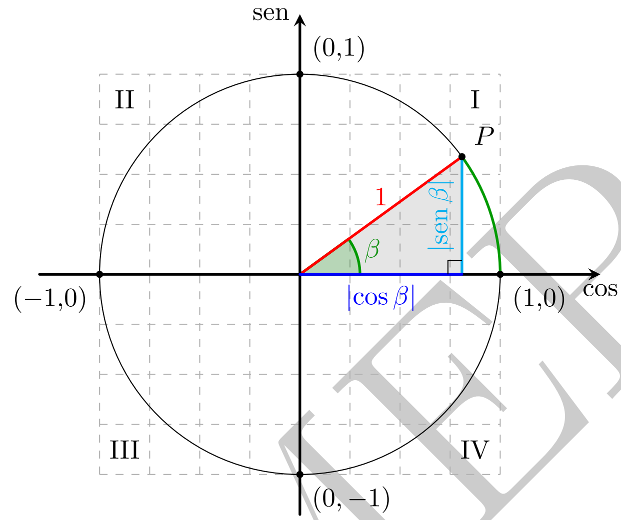


Figura 1: seno e cosseno no primeiro quadrante.

Sem perda da generalidade, assuma que $0 < \beta < 2\pi$. (Não sendo esse o caso, podemos substituir β por sua menor determinação positiva, conforme estudado na primeira aula do módulo "Círculo Trigonométrico".) Como antes, assuma que $\beta = \widehat{AP}$ e vamos considerar separadamente os casos em que P se encontra em cada um dos quatro quadrantes. Em cada caso, definiremos um ponto Q e tomaremos $\alpha = \widehat{AQ}$. Com uma escolha adequada de Q, teremos

$$|\operatorname{sen}\beta| = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad |\cos\beta| = \cos\alpha.$$

Observe que podemos encontrar os sinais de $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$ dependendo do quadrante de P.

1.1 Do segundo ao primeiro quadrante

A Figura **??** mostra um exemplo com P no segundo quadrante, isto é, com $\pi/2 < \beta < \pi$. Veja que, neste caso, temos $\cos\beta < 0$ e $\operatorname{sen}\beta > 0$. Denotando por B o pé da perpendicular baixada de P ao eixo x, temos

$$\overline{PB} = \operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos\beta.$$

Vamos escolher o ponto Q como sendo o simétrico de P em relação ao eixo y (veja a Figura **??**); assim, como $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, temos $Q = (-\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Por outro lado, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Comparando as duas expressões para as coordenadas do ponto Q, obtemos

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos\alpha.$$

Agora, seja B' o pé da perpendicular baixada de Q ao eixo x (observe novamente a Figura **??**). A simetria entre P e Q em relação ao eixo y assegura a simetria de B e B' em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos OPB e OQB' são congruentes, pelo caso "lado, lado, lado". Logo, $P\widehat{O}B = Q\widehat{O}B'$. Por outro lado, $P\widehat{O}B = \pi - \beta$. Portanto,

$$\alpha = \widehat{AQ} = Q\widehat{O}B' = P\widehat{O}B = \pi - \beta.$$

Substituindo essa expressão para α nas expressões que relacionam $\operatorname{sen}\alpha$ com $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\alpha$ com $\cos\beta$, concluímos que

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(\pi - \beta). \tag{2}$$

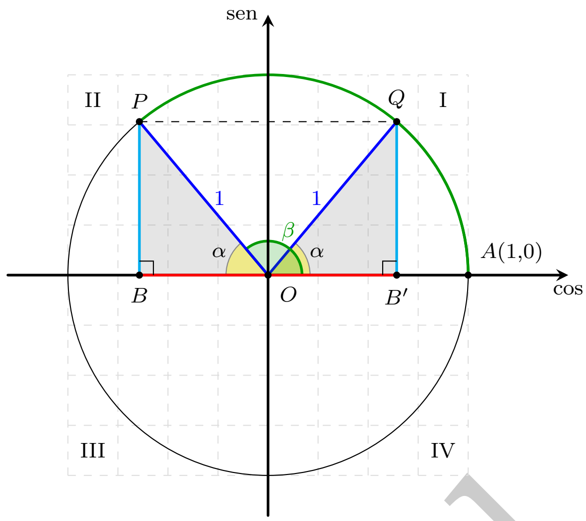


Figura 2: seno e cosseno no segundo quadrante.

Observação 1. *É possível mostrar que as equações em* (**??**) *são válidas para qualquer valor de* β *(contudo, apenas no caso em* β *está no segundo quadrante é que temos* $\pi - \beta$ *situado no primeiro quadrante).*

A partir das fórmulas (**??**) e levando em consideração a observação acima, temos também

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \beta)}{-\cos(\pi - \beta)} = -\operatorname{tg}(\pi - \beta),$$

para todo valor de β tal que $\cos\beta \neq 0$.

1.2 Do terceiro ao primeiro quadrante

A Figura **??** mostra um exemplo com P no terceiro quadrante, isto é, com $\pi < \beta < 3\pi/2$. Assim sendo, temos $\cos\beta < 0$ e $\operatorname{sen}\beta < 0$. Logo, para o ponto B como antes (isto é, para B sendo o pé da perpendicular baixada de P ao eixo x), temos

$$\overline{PB} = -\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos\beta.$$

Desta vez, vamos escolher Q como sendo o simétrico de P em relação à origem O do plano cartesiano (veja a Figura **??**). Em particular, Q pertence ao primeiro quadrante e os pontos P, O e Q são colineares. Assim, como $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, temos que $Q = (-\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$. Agora, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também podemos escrever $Q = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Comparando novamente as duas expressões acima para as coordenadas de Q, obtemos

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos\alpha.$$

Também como antes, seja B' o pé da perpendicular de Q traçada ao eixo x. Veja que $P\widehat{O}B = Q\widehat{O}B'$, pois estes são ângulos opostos pelos vértice. Por outro lado, $P\widehat{O}B = \beta - \pi$, de sorte que

$$\alpha = \widehat{AQ} = P\widehat{O}B = \beta - \pi.$$

Substituindo essa expressão para α nas relações entre $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\alpha$, $\cos\beta$, chegamos a

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\beta - \pi) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(\beta - \pi). \tag{3}$$

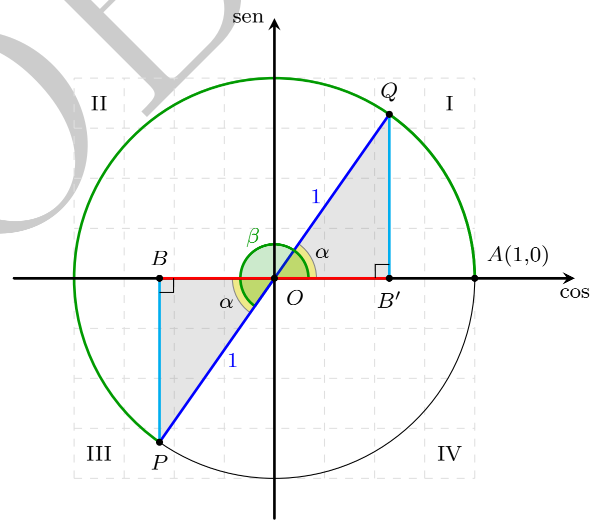


Figura 3: seno e cosseno no terceiro quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{-\operatorname{sen}(\beta - \pi)}{-\cos(\beta - \pi)} = \operatorname{tg}(\beta - \pi).$$

Uma vez que $\beta = \pi + \alpha$, isso também equivale a

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha).$$

Observação 2. *O argumento deste caso é essencialmente o mesmo do caso anterior. Porém, o fato de* P *estar no terceiro quadrante faz com que os sinais de* $\operatorname{sen}\beta$ *e* $\cos\beta$ *sejam diferentes comparados ao caso anterior, assim como a relação entre* β *e* α *é diferente.*

Também é possível mostrar que as equações em (??), assim como a relação entre $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ são válidas para qualquer valor de β (a última delas contanto que $\cos\beta \neq 0$. Mas, apenas no caso em β está no terceiro quadrante, temos que $\beta - \pi$ está no primeiro quadrante.

1.3 Do quarto ao primeiro quadrante

Como último caso, a Figura **??** mostra um exemplo com P no quarto quadrante, isto é, com $3\pi/2 < \beta < 2\pi$. Veja que, desta feita, temos $\cos\beta > 0$ e $\operatorname{sen}\beta < 0$. Logo, definindo o ponto B como antes, temos

$$\overline{PB} = -\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \cos\beta.$$

Escolhendo o ponto Q como o simétrico de P em relação ao eixo x (veja a Figura **??**), temos Q situado no primeiro quadrante. Ainda pela simetria, juntamente com o fato de que $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, obtemos $Q = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$. Por outro lado, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Assim, comparando as duas expressões para as coordenadas de Q, vem

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\beta = \cos\alpha.$$

Neste caso, o pé B' da perpendicular baixada de Q ao eixo x coincide com o ponto B. Então, os triângulos OPB e OQB são congruentes pelo caso "lado, lado, lado", de sorte que $P\widehat{O}B = Q\widehat{O}B$.

Por outro lado, $P\widehat{O}B = 2\pi - \beta$. Portanto,

$$\alpha = \widehat{AQ} = Q\widehat{O}B = P\widehat{O}B = 2\pi - \beta.$$

Concluímos, pois, que

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(2\pi - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = \cos(2\pi - \beta). \tag{4}$$

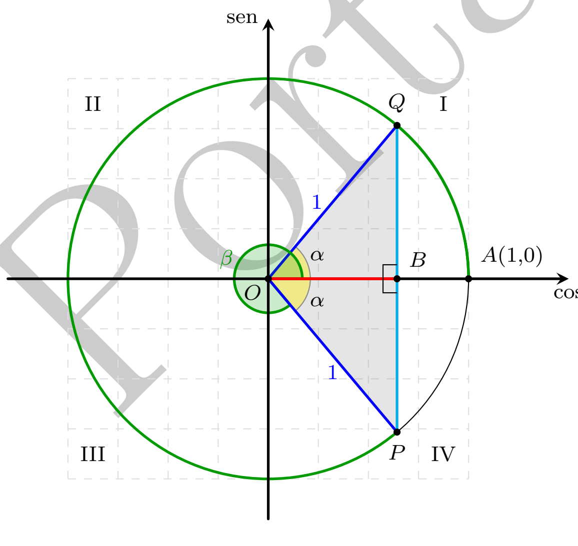


Figura 4: seno e cosseno no quarto quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi - \beta)}{\cos(2\pi - \beta)} = -\operatorname{tg}(2\pi - \beta).$$

Observação 3. *Como nos outros casos, as equações em (??) também valem para qualquer arco β (no caso da tangente, contanto que $\cos\beta \neq 0$. Contudo, o caso em que β está no terceiro quadrante é interessante pois $2\pi - \beta$ está no primeiro quadrante.*

Antes de examinarmos alguns exercícios, cumpre traduzirmos as fórmulas obtidas nas subseções anteriores, de radianos para graus. Fazemos isto no exemplo a seguir.

Exemplo 4. *Traduza de radianos para graus as relações (??), (??) e (??) obtidas nas subseções acima.*

Solução. Lembre-se de que π radianos equivalem a $180°$.

Assim, para β no segundo quadrante temos, em graus, $90° < \beta < 180°$. Ao reduzir ao primeiro quadrante, escolhemos $\alpha = 180° - \beta$, de modo que

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(180° - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(180° - \beta).$$

Quando β está no terceiro quadrante, temos em graus que $180° < \beta < 270°$. Neste caso, $\alpha = \beta - 180°$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(\beta - 180°) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(\beta - 180°).$$

Por fim, quando β está no quarto quadrante, temos em graus que $270° < \beta < 360°$. Também, o arco $\alpha = 360° - \beta$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(360° - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = \cos(360° - \beta).$$

□

2 Exercícios

Para os exercícios seguintes sugerimos que, antes de ler suas soluções, o leitor desenhe os ângulos envolvidos sobre o Círculo Trigonométrico e use as devidas simetrias, no lugar de simplesmente utilizar as fórmulas apresentadas na seção anterior. Abaixo, relembramos os valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis.

Ângulo (graus)	Ângulo (radianos)	sen	cos	tg
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Exemplo 5. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen} 120°$ *e* $\cos 120°$.

Solução. Veja que $120°$ pertence ao segundo quadrante, pois $90° < 120° < 180°$. Assim, de acordo com a Figura **??**, ao reduzir $120°$ para o primeiro quadrante, obtemos um ângulo de $60°$. De acordo com a tabela anterior, $\operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$ e $\cos 60° = 1/2$. Mas, como $\operatorname{sen} 120° > 0$ e $\cos 120° < 0$, temos que:

$$\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}. \qquad \square$$

Exemplo 6. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen}(5\pi/6)$ *e* $\cos(5\pi/6)$.

Solução. Veja que $5\pi/6$ pertence ao segundo quadrante, pois está entre $\pi/2$ e π. Como no problema anterior, observando a Figura **??**, reduzimos esse arco ao arco do primeiro quadrante $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$. Por outro lado, sabemos que $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Então, como $\operatorname{sen}(5\pi/6) > 0$ e $\cos(5\pi/6) < 0$, temos:

$$\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \square$$

Exemplo 7. *Qual o valor de* $\operatorname{tg}(5\pi/4)$*?*

Solução. Veja que $\pi < 5\pi/4 < 3\pi/2$, logo, $5\pi/4$ pertence ao terceiro quadrante; então, $\operatorname{tg}(5\pi/4) > 0$. De acordo com Figura **??**, ao reduzir $5\pi/4$ ao primeiro quadrante, obtemos $\alpha = 5\pi/4 - \pi = \pi/4$. Logo,

$$\operatorname{tg}(5\pi/4) = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1. \qquad \square$$

Exemplo 8. *Encontre o ângulo* α *tal que* $0° \leq \alpha < 360°$,

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen} 216° \quad \textit{e} \quad \cos\alpha = \cos 216°.$$

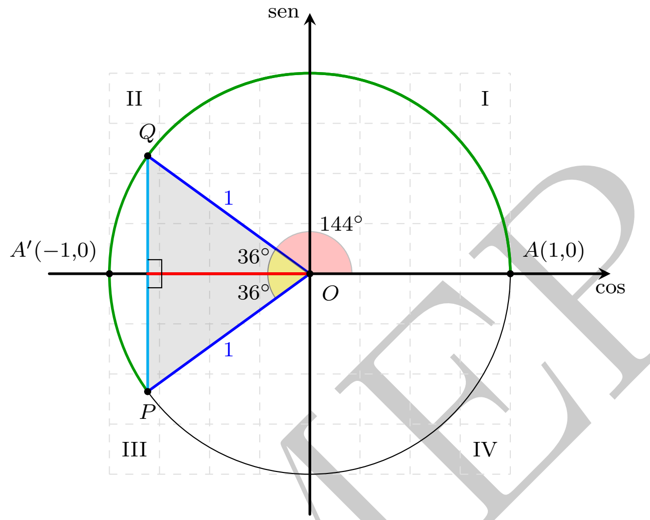
Solução. Essa pergunta é diferente das anteriores, mas podemos atacá-la de maneira similar. Primeiro, vamos identificar o quadrante de $216°$. Como $180° < 216° < 270°$, temos $\operatorname{sen}(216) < 0$ e $\cos(216) < 0$. Então, as igualdades do enunciado garantem que $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$ e $\cos(\alpha) < 0$. Isso, juntamente com $0° \leq \alpha < 360°$, indica que α pertence ao segundo quadrante.

Sejam $A = (1{,}0)$, $A' = (-1{,}0)$ e P o ponto do Círculo Trigonométrico tal que $A\widehat{O}P = 216°$ (com o arco $\widehat{AP}$ medido no sentido anti-horário, de A para P). Agora, observe que a redução de $216°$ ao primeiro quadrante é $216° - 180° = 36°$.

A fim de obter o ponto do segundo quadrante correspondente a α, tomemos Q como o simétrico de P em relação ao eixo x (veja a figura a seguir). Temos que $Q\widehat{O}A' = A'\widehat{O}P = 36°$. Daí, $A\widehat{O}Q = 180° - 36° = 144°$.

Por fim, veja que $\alpha = 144°$ satisfaz as condições do enunciado, pois

$$\operatorname{sen} 144° = -\operatorname{sen} 216° \quad \text{e} \quad \cos 144° = \cos 216°.$$



$\square$

Exemplo 9. *Se* $R = \operatorname{sen} 130° + \cos 130°$. *Decida, com justificativa, se* R *é positivo, negativo ou igual a zero.*

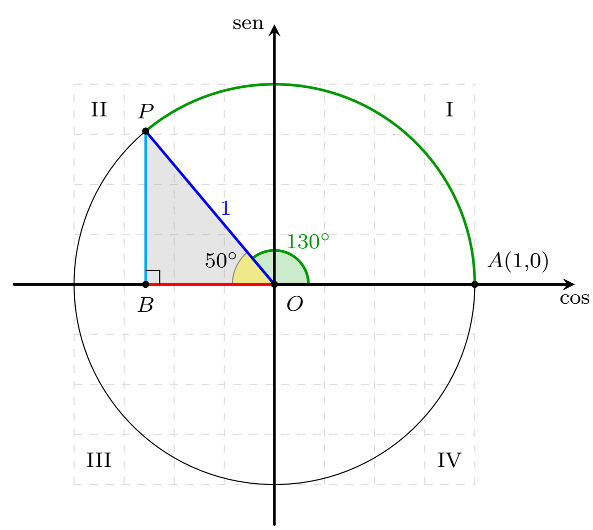
Solução. A figura seguinte nos mostra um ângulo de $130°$, juntamente com o arco correspondente sobre o Círculo Trigonométrico. Veja que $\operatorname{sen} 130° > 0$ enquanto que $\cos 130° < 0$. Se B é o pé da perpendicular de P traçada ao eixo x, temos

$$\overline{PB} = \operatorname{sen} 130° \quad \text{e} \quad \overline{BO} = -\cos 130°.$$

Logo,

$$R = \overline{PB} - \overline{BO}.$$

No triângulo PBO, temos que $P\widehat{O}B = 180° - 130° = 50°$, de sorte que $B\widehat{P}O = 40°$. Como o menor lado de um triângulo é o oposto ao seu menor ângulo, concluímos que $\overline{BO} < \overline{PB}$. Logo, $R > 0$.



$\square$

Exemplo 10. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen} 1410°$, $\cos 1410°$ *e* $\operatorname{tg} 1410°$.

Solução. Neste caso, vamos primeiro calcular a menor determinação positiva de $1410°$. Para isso, começamos dividindo 1410 por 360, obtendo

$$1410 = 3 \cdot 360 + 330.$$

Logo, $1410°$ e $330°$ são congruentes, de modo que

$$\operatorname{sen} 1410° = \operatorname{sen} 330° \quad \text{e} \quad \cos 1410° = \cos 330°.$$

Agora, basta reduzir $330°$ ao primeiro quadrante. Observando que $270° < 330° < 360°$, vemos que o arco correspondente a $330°$ pertence ao quarto quadrante. Então, revisitando a Figura **??**, vemos que devemos tomar $\alpha = 360° - 330° = 30°$. Dessa forma, segue que

$$\operatorname{sen} 1410° = \operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 1410° = \cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 1410° = \operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad \square$$

Exemplo 11. *Lembre-se de que arcos complementares são aqueles cuja soma é igual a $\pi/2$ e suplementares são aqueles cuja soma é igual a π. Sabendo que α e β são complementares e que β e γ são suplementares, com* $\cos\gamma \neq 0$, *calcule a razão entre* $\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\cos\gamma$.

Solução. Como α e β são complementares, temos que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. No Módulo "Círculo Trigonométrico" vimos que isso implica que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$.

Agora, β e γ satisfazem $\beta + \gamma = \pi$, de sorte que (**??**) fornece $\cos\beta = -\cos\gamma$. Então, $\operatorname{sen}\alpha = -\cos\gamma$ e a razão pedida é igual a

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -1. \qquad \square$$

Exemplo 12. *Sabendo que* $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$ *e que α pertence ao segundo quadrante, calcule os valores de* $\cos\alpha$ *e* $\operatorname{tg}\alpha$.

Solução. Recordemos que, pela relação fundamental, tem-se

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Logo,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \implies \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

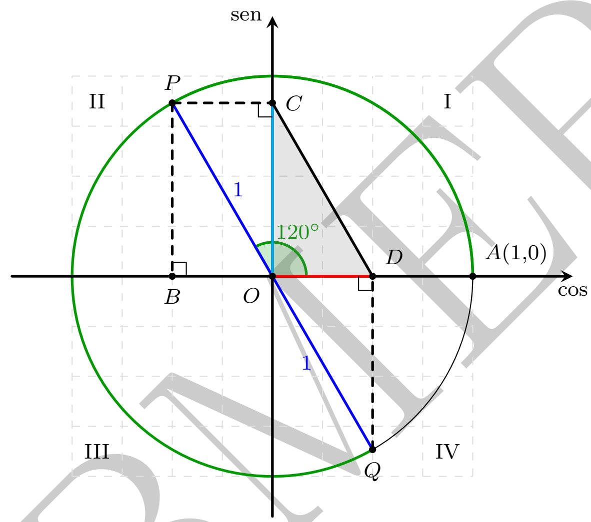
Como α pertence ao segundo quadrante, temos $\cos\alpha < 0$. Assim,

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Por fim, temos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}. \qquad \square$$

Exemplo 13. *Na figura a seguir, temos um círculo de raio 1, com centro em O, e sabemos que os pontos P, O e Q são colineares. Sabendo que o arco trigonométrico $\widehat{AP}$ mede $2\pi/3$ radianos, calcule a área do triângulo OCD.*



Solução 1. Inicialmente, observe que $2\pi/3$ radianos correspondem a $120°$. Então, temos

$$\overline{OC} = |\operatorname{sen}(120°)| \quad \text{e} \quad \overline{OB} = |\cos(120°)|.$$

Conforme calculado no Exemplo **??**, tais igualdades fornecem

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \frac{1}{2}.$$

Como P, O e Q são colineares, temos $P\widehat{O}B = D\widehat{O}Q$, pois são opostos pelo vértice. Consequentemente, seus complementos também são iguais, isto é, $B\widehat{P}O = D\widehat{Q}O$. Mas, como $\overline{PO} = \overline{QO}$, segue que os triângulos OPB e QOD são congruentes, pelo caso "ângulo, lado, ângulo". Logo, $\overline{OD} = \overline{OB}$.

Assim, a área do triângulo OCD é igual a:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \qquad \square$$

Solução 2. Temos $C\widehat{O}P = 120° - 90° = 30°$. Como $\overline{OP} = 1$, observando o triângulo COP temos

$$\overline{PC} = \operatorname{sen} 30° \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \cos 30°.$$

Logo,

$$\overline{PC} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como na solução anterior, concluímos que os triângulos COP e DOQ são congruentes. Então, $\overline{OD} = \overline{PC}$ e podemos calcular a área de OCD da mesma forma que na primeira solução. $\square$

Exemplo 14. *Sabendo que α, β e γ são os ângulos de um triângulo não retângulo, calcule o valor numérico da expressão*

$$R = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\gamma} + \operatorname{tg}(\alpha+\beta+2\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$$

Solução. Temos que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Logo,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\pi-\gamma) = \operatorname{sen}\gamma$$

e, daí,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} = 1.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+2\gamma) = \operatorname{tg}(\pi+\gamma) = \operatorname{tg}\gamma,$$

ao passo que

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi-\gamma)} = \frac{1}{-\operatorname{tg}\gamma}.$$

(Note que os cálculos acima têm sentido, uma vez que $\gamma \neq 90° \Rightarrow \cos\gamma \neq 0$.) Combinando os dois últimos resultados, temos que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+2\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{-\operatorname{tg}\gamma} = -1.$$

Então, a expressão do enunciado vale

$$R = 1 - 1 = 0. \qquad \square$$

Dicas para o Professor

Este módulo tem como pré-requisitos o bom entendimento das noções geométricas de simetria (em relação a uma reta ou a um ponto) e conhecimentos básicos sobre congruência de triângulos. É imprescindível fazer várias figuras e exemplos para que a redução ao primeiro quadrante se torne natural. Observe que as escolhas do ângulo α em função de β, feitas na Seção **??**, são consequências naturais das simetrias encontradas. Por isso, melhor do que memorizar as relações (**??**), (**??**) e (**??**) é sempre tentar visualizá-las. De toda forma, após usá-las várias vezes, elas acabarão sendo memorizadas.

Recomendamos que o professor aborde o conteúdo desta aula em dois ou três encontros de 50 minutos. A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.