# Material Teórico - Aplicações das Técnicas Desenvolvidas

## Exercícios e Tópicos Relacionados a Combinatória

## Segundo Ano do Ensino Médio

Prof. Cícero Thiago Bernardino Magalhães
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material teórico, vamos usar as técnicas desenvolvidas nas aulas anteriores para resolver alguns problemas interessantes de Combinatória, provar algumas identidades algébricas e, também, mostrar alguns erros que podem eventualmente aparecer em algumas contagens.

**Exemplo 1.** *Quantos subconjuntos possui um conjunto com $n$ elementos?*

**Solução.** Para facilitar as ideias, seja $A = \{1, 2, 3, \dots n\}$ um de conjunto com $n$ elementos. Se $B$ é um subconjunto de $A$, então, para cada elemento $i$ de $A$, há duas possibilidades: ou $i$ pertence ao subconjunto $B$, ou $i$ não pertence a $B$. Como há $n$ valores possíveis para $i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, o princípio multiplicativo garante que o total de subconjuntos $B$ que podemos formar é igual a

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n.$$

Agora, observe que, se $A'$ é um conjunto qualquer com $n$ elementos, então $A'$ também tem $2^n$ subconjuntos. Isto porque , escolhendo uma correspondência biunívoca entre os elementos de $A$ e de $A'$, podemos escrever

$$A' = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

com $a_1, a_2, \dots, a_n$ dois a dois distintos. Por sua vez, tal correspondência biunívoca estabelece uma outra, dessa vez entre os subconjuntos de $A$ e os de $A'$. Por exemplo, se $n \geq 3$, então, ao subconjunto $\{1, 2, 3\}$ de $A$, corresponde o subconjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ de $A'$, e vice-versa. Dessa forma, concluímos que $A'$ tem tantos subconjuntos quanto $A$, isto é, $A'$ tem, exatamente, $2^n$ subconjuntos. □

Uma consequência interessante do exemplo anterior deriva da seguinte solução alternativa para o cálculo do número de subconjuntos de $A = \{1, 2, \dots, n\}$: já vimos, na aula sobre combinações, que, para $0 \leq j \leq n$, o total de subconjuntos de $A$ com exatamente $j$ elementos é $\binom{n}{j}$. Além disso, variando $j$ de 0 a $n$, cada subconjunto de $A$ é contado exatamente uma vez. Portanto, pelo princípio aditivo, o total de subconjuntos de $A$ também é igual a

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Como um mesmo problema de contagem, resolvido corretamente de duas maneiras distintas, não pode ter dois resultados diferentes, concluímos que

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

**Exemplo 2.** *Prove a validade da* **relação de Stifel***:*

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p},$$

*para todos os números naturais $p$ e $n$, tais que $p \leq n - 1$.*

**Prova.** Para auxiliar a prova, seja novamente $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Como no argumento acima, temos que $\binom{n}{p}$ representa o total de subconjuntos de $A$ com $p$ elementos.

Vamos, agora, fazer a contagem desse número de subconjuntos de $A$ de um outra maneira e, para isso, seja $B$ um subconjunto de $A$ com $p$ elementos. Como temos as possibilidades $1 \in B$ e $1 \notin B$, vamos considerá-las separadamente:

(i) Contemos o total de subconjuntos $B$ de $A$, com $p$ elementos e tais que $1 \in B$: para completar $B$, é necessário escolher $p - 1$ outros elementos para ele, dentre os $n - 1$ elementos restantes de $A$. Como sabemos, isso pode ser feito de exatamente $\binom{n-1}{p-1}$ maneiras.

(ii) Contemos o total de subconjuntos $B$ de $A$, com $p$ elementos e tais que $1 \notin B$: nesse caso, temos que escolher os $p$ elementos de $B$ dentre os $n - 1$ elementos distintos de 1 do conjunto $A$. Como sabemos, isso pode ser feito de exatamente $\binom{n-1}{p}$ maneiras.

Por fim, aplicando o princípio aditivo aos dois casos acima, concluímos que o número de subconjuntos de $A$ com $p$ elementos também é igual a $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$. Portanto, não há alternativa que não seja a validade da igualdade do enunciado. □

**Exemplo 3.** *Quantos são os subconjuntos $A$ do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$, tais que a soma de seus elementos máximo e mínimo de $A$ seja igual a 13?*

**Solução.** Se $a$ é o menor elemento de $A$, então $13 - a$ deve ser seu maior elemento. Dessa forma os outros elementos de $A$, caso existam, só podem ser escolhidos dentre os $12 - 2a$ números $a + 1, \dots, 12 - a$. Pelo Exemplo 1, existem exatamente $2^{12-2a}$ possíveis subconjuntos $A$ de $\{1, 2, \dots, 12\}$, tais que o menor elemento de $A$ é igual a $a$.

Agora, no argumento do parágrafo anterior, devemos ter $a \leq 13 - a$, de forma que $a \leq 6$. Portanto, $a = 0, 1, 2, \dots, 5$ ou 6 e, assim, o total de subconjuntos pedido é

$$\begin{aligned} & 2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = \\ & = 1024 + 512 + 64 + 16 + 4 + 1 = 1365. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.** *Calcule o total de subconjuntos de 3 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, que não possuem dois números consecutivos dentre seus elementos.*

**Solução.** Associe a cada subconjunto do tipo desejado uma sequência de 10 sinais $+$ ou $-$, do seguinte modo: coloque um sinal de $+$ na posição correspondente aos números que pertencem ao subconjunto, e um sinal de $-$ na posição correspondente aos números que não pertencem ao subconjunto. De forma que, por exemplo, temos a correspondência

$$\{1, 3, 6\} \longleftrightarrow (+, -, +, -, -, +, -, -, -, -).$$

De maneira mais geral, é fácil perceber que, para formar um subconjunto de 3 elementos conforme pedido, devemos formar uma sequência de três sinais $+$ e sete sinais $-$, sem que haja dois sinais $+$ consecutivos. Dessa forma, começamos distribuindo os sete sinais $-$, como abaixo:

$$\underline{?} - \underline{?} - \underline{?} - \underline{?} - \underline{?} - \underline{?} - \underline{?} - \underline{?}.$$

Os sinais $+$ devem necessariamente aparecer nos lugares de três dos pontos de interrogação acima. Mas, como temos exatamente oito pontos de interrogação, dos quais três devem ser escolhidos, concluímos que podemos escolher o lugar dos três sinais $+$ de, exatamente,

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

maneiras distintas.

Portanto, existem exatamente 56 subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ satisfazendo as condições do enunciado. $\square$

Podemos generalizar o exemplo anterior da seguinte forma: dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e um natural $p < n$, o total de subconjuntos de $p$ elementos de $A$, que não possuem dois números consecutivos dentre seus elementos, é igual a

$$\binom{n-p+1}{p}.$$

Este resultado é conhecido com o **primeiro lema de Kaplansky**[1].

**Exemplo 5.** *As três provas de um vestibular devem ser realizadas na primeira semana do ano. De quantos modos é possível escolher os dias das provas, de modo que não haja provas em dias consecutivos?*

**Solução.** É fácil ver que, para escolher os dias das provas, devemos formar um subconjunto de três dias do conjunto dos sete dias da primeira semana, de modo que não haja dias consecutivos no subconjunto. Portanto, pelo primeiro lema de Kaplansky, o total de escolhas possíveis é

$$\binom{7-3+1}{3} = \binom{5}{3} = 10.$$

$\square$

**Exemplo 6.** *Uma fila tem* 20 *cadeiras, nas quais devem sentar-se* 8 *meninas e* 12 *meninos. De quantos modos isso pode ser feito, se quaisquer duas das* 8 *meninas não devem ficar em cadeiras vizinhas?*

[1] Em homenagem a Irving Kaplansly, matemático americano do século XX, que estabeleceu esse resultado pela primeira vez.

**Solução.** Inicialmente, devemos escolher 8 cadeiras sem que haja duas cadeiras consecutivas. Pelo primeiro lema de Kaplansky, isso pode ser feito de

$$\binom{20-8+1}{8} = \binom{13}{8} = 1287$$

maneiras distintas.

Uma vez escolhidas as cadeiras das meninas, podemos permutá-las nesses oito lugares de $8!$ maneiras. Por outro lado, os meninos devem sentar-se nas doze cadeiras restantes, mas, ao fazê-lo, podem ser permutados de $12!$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras dispor as 8 meninas e os 12 meninos conforme pedido é igual a $1287 \cdot 8! \cdot 12!$. $\square$

**Exemplo 7.** *Em uma loteria, seis números do conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ *são escolhidos aleatoriamente. De quantas maneiras isto pode ser feito, de modo que, dentre os seis números escolhidos, existam pelo menos dois deles que sejam consecutivos?*

**Solução.** Sabemos que o total de subconjuntos de seis elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ (sem restrições adicionais) é $\binom{49}{6}$. Por outro lado, já sabemos (pelo primeiro lema de Kaplansky) que, dentre esses, aqueles subconjuntos sem números consecutivos são, ao todo, $\binom{49-6+1}{6} = \binom{44}{6}$. Portanto, o total de subconjuntos de seis elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ e que contêm pelo menos dois números consecutivos é $\binom{49}{6} - \binom{44}{6}$. $\square$

**Exemplo 8.** *De quantas maneiras podemos distribuir* 8 *sinais* $+$ *e* 5 *sinais* $-$ *em uma fila, de modo que não haja dois sinais* $-$ *consecutivos?*

**Solução.** Imitando a ideia da solução do exemplo 4, ao distribuirmos os 8 sinais $+$, teremos 9 espaços para escolher onde serão colocados os 5 sinais $-$. Portanto o total de permutações desejadas coincide com o número de modos de escolhermos 5 dessas 9 posições, de forma que é igual a $\binom{9}{5}$. $\square$

Generalizando o exemplo anterior, podemos dizer que, se $k \geq r$, então o número de maneiras de distribuir $k$ sinais $+$ e $r$ sinais $-$ em fila, de modo que não haja dois sinais $-$ consecutivos, é igual a $\binom{k+1}{r}$.

A seguir, veremos uma variação interessante da discussão acima.

**Exemplo 9.** *De quantas maneiras podemos distribuir* 10 *símbolos em fila, supondo que cada símbolo seja um sinal* $+$ *ou um sinal* $-$*, de tal forma que não haja dois sinais* $-$ *consecutivos?*

**Solução.** A fim de que não haja dois sinais $-$ consecutivos, é fácil ver que podemos ter no máximo 5 sinais $-$. Dessa forma, são possíveis as seguintes configurações e (pela discussão acima) quantidades de possibilidades:

- 10 sinais de $+$ e 0 sinal de $-$: há $\binom{11}{0}$ possibilidades.
- 9 sinais de $+$ e 1 sinal de $-$: há $\binom{10}{1}$ possibilidades.
- 8 sinais de $+$ e 2 sinais de $-$: há $\binom{9}{2}$ possibilidades.
- 7 sinais de $+$ e 3 sinais de $-$: há $\binom{8}{3}$ possibilidades.
- 6 sinais de $+$ e 4 sinais de $-$: há $\binom{7}{4}$ possibilidades.
- 5 sinais de $+$ e 5 sinais de $-$: há $\binom{6}{5}$ possibilidades.

Portanto, o total de possíveis distribuições dos símbolos é

$$\binom{11}{0}+\binom{10}{1}+\binom{9}{2}+\binom{8}{3}+\binom{7}{4}+\binom{6}{5}=$$
$$=1+10+36+56+35+6=144.$$

$\square$

Nosso próximo exemplo generaliza o anterior.

**Exemplo 10.** *De quantas maneiras podemos distribuir $n$ símbolos em fila, supondo que cada símbolo pode ser um sinal $+$ ou um sinal $-$, de tal forma que não haja dois sinais $-$ consecutivos?*

**Solução.** Imitando a ideia do exemplo anterior, temos que o total de distribuições é

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{3}+\cdots.$$

Outra maneira de abordar esse problema é raciocinar *recursivamente*. Desse modo, começamos observando que o total de maneiras de distribuir os $n$ símbolos é uma função de $n$, e será denotado por $F(n)$. Separemos as possíveis filas de $n$ símbolos em dois tipos diferentes: as que iniciam com um sinal $+$ e as que iniciam com um sinal $-$.

- Há exatamente $F(n-1)$ distribuições de $n$ símbolos que iniciam com um sinal $+$. De fato, cada uma dessas distribuições pode ser obtida colocando um sinal de $+$ à frente de cada uma das $F(n-1)$ distribuições de $n-1$ símbolos $+$ ou $-$ (e também satisfazendo a condição de não terem dois sinais $-$ consecutivos).

- Por outro lado, se uma distribuição inicia por um sinal $-$, então, Obrigatoriamente, o segundo sinal é $+$, pois não pode haver dois sinais $-$ consecutivos. Portanto, para compor a distribuição dos $n$ símbolos, basta escolhermos os $n-2$ sinais restantes, novamente sob a condição de que não haja dois sinais $-$ consecutivos. Logo, existem exatamente $F(n-2)$ de tais distribuições.

Combinando os dois casos acima com o auxílio do princípio aditivo, concluímos que

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2),$$

para todo $n\geq 3$. Por fim, pela definição de $F(n)$, temos que $F(1)=2$ e $F(2)=3$, de sorte que

$$F(3)=F(2)+F(1)=3+2=5$$
$$F(4)=F(3)+F(2)=5+3=8$$
$$F(5)=F(4)+F(3)=8+5=13$$
$$F(6)=F(5)+F(4)=13+8=21$$
$$F(7)=F(6)+F(5)=21+13=34$$
$$\vdots$$

$\square$

Os números $F(n)$ do exemplo anterior são conhecidos como os **números de Fibonacci**. É possível provar que

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

**Exemplo 11.** *Quantos divisores positivos tem o número $72=2^3\cdot 3^2$?*

**Solução.** Aritmética elementar ensina que cada divisor positivo do número $72=2^3\cdot 3^2$ possui a forma $2^a\cdot 3^b$, com $a\in\{0,1,2,3\}$ e $b\in\{0,1,2\}$. Por exemplo, $2^3\cdot 3^1$, $2^0\cdot 3^2$ e $2^2\cdot 3^0$ são divisores positivos de 72. Portanto, o número de divisores positivos de 72 coincide com o número de pares ordenados $(a,b)$ de inteiros tais $0\leq a\leq 3$ e $0\leq b\leq 2$. Pelo princípio multiplicativo, há exatamente $4\cdot 3=12$ de tais pares ordenados. $\square$

Generalizando o exemplo anterior, seja

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k},$$

com $p_1,p_2,\ldots,p_k$ números primos distintos e $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ inteiros positivos. Aritmética elementar garante que um inteiro positivo $d$ divide $n$ se, e só se, $d=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, onde $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$, para $1\leq i\leq k$. Portanto, $n$ possui tantos divisores positivos quantas sejam as maneiras de escolhermos os inteiros $\beta_1,\ldots,\beta_k$, tais que $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$ para $1\leq i\leq k$. Como há exatamente $\alpha_i+1$ possibilidades para $\beta_i$ (quais sejam, 0, 1, ..., $\alpha_i$), invocando novamente o princípio multiplicativo, concluímos que $n$ possui exatamente

$$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1) \qquad (1)$$

divisores positivos.

O próximo exemplo traz uma variação simples do anterior.

**Exemplo 12.** *Quantos divisores positivos pares possui o número* $72 = 2^3 \cdot 3^2$*?*

**Solução.** Cada divisor positivo par do número $72 = 2^3 \cdot 3^2$ possui a forma $2^a \cdot 3^b$, com $a \in \{1, 2, 3\}$ e $b \in \{0, 1, 2\}$. Portanto, o número de divisores positivos pares de 72 coincide com o número de pares ordenados de inteiros $(a, b)$, tais que $1 \le a \le 3$ e $0 \le b \le 2$. Pelo princípio multiplicativo, tal número é igual a $3 \cdot 3 = 9$. □

**Exemplo 13.** *Qual a soma dos divisores positivos de* $72 = 2^3 \cdot 3^2$*?*

**Solução.** Listando e somando todos os divisores positivos de 72, encontramos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 12 + 18 + 24 + 36 + 72 = 195.$$

Entretanto, podemos fazer isso da seguinte maneira mais organizada:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 12 + 18 + 24 + 36 + 72 = \\
&= 2^0 \cdot 3^0 + 2^1 \cdot 3^0 + 2^0 \cdot 3^1 + 2^2 \cdot 3^0 + 2^1 \cdot 3^1 + 2^3 \cdot 3^0 + \\
&\quad + 2^0 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^1 + 2^1 \cdot 3^2 + 2^3 \cdot 3^1 + 2^2 \cdot 3^2 + 2^3 \cdot 3^2 \\
&= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot 3^0 + (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot 3^1 \\
&\quad + (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot 3^2 \\
&= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2).
\end{aligned}$$

Agora, observe que $2^0+2^1+2^2+2^3$ é uma PG com $3+1 = 4$ termos e $3^0+3^1+3^2$ é uma PG com $2+1 = 3$ termos. Por fim, lembrando que

$$1 + r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \qquad (2)$$

para todo real $r \neq 1$, concluímos que a soma dos divisores positivos de 72 é igual a

$$\frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 15 \cdot 13 = 195.$$

□

Novamente generalizando o exemplo anterior, seja

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

com $p_1, p_2, \ldots, p_k$ números primos distintos e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ inteiros positivos. Distribuindo os produtos

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \ldots$$
$$\ldots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}),$$

obtemos, pelo princípio multiplicativo, uma soma com exatamente $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \ldots (\alpha_k+1)$ parcelas, na qual cada divisor positivo de $n$ comparece precisamente uma vez. Fazendo $r$ sucessivamente igual a $p_1$, $p_2$, ..., $p_k$ em (2), concluímos que a soma dos divisores positivos de $n$ é igual a

$$\frac{p_1^{\alpha_1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n} - 1}{p_n - 1}.$$

**Exemplo 14.** *Seja* $n = 2^{31} \cdot 3^{19}$*. Quantos divisores positivos de* $n^2$ *são menores do que* $n$ *mas não dividem* $n$*?*

**Solução.** Mais geralmente, seja $n = p^r \cdot q^s$, em que $p$ e $q$ são primos distintos e $r$ e $s$ são inteiros positivos. Então, $n^2 = p^{2r} \cdot q^{2s}$, de forma que, por (1), $n^2$ possui exatamente

$$(2r + 1)(2s + 1)$$

divisores positivos. Observe agora que, para cada divisor positivo $d$ de $n^2$, tal que $d < n$, o número natural $\frac{n^2}{d}$ também é um divisor positivo de $n^2$, tal que $\frac{n^2}{d} > n$. Portanto, excluído o divisor $n$ de $n^2$, concluímos que existem exatamente

$$\frac{(2r + 1)(2s + 1) - 1}{2} = 2rs + r + s$$

divisores positivos de $n^2$ e que são menores que $n$.

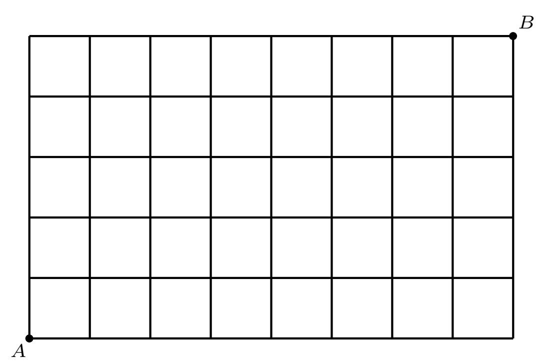
Como (novamente por (1)) $n$ possui $(r + 1)(s + 1)$ divisores positivos (incluído o próprio $n$), e como todo divisor de $n$ é também divisor de $n^2$, concluímos que existem

$$(2rs + r + s) - [(r + 1)(s + 1) - 1] = rs$$

divisores positivos de $n^2$, menores que $n$ e que não são divisores de $n$.

Em particular, se $r = 31$ e $s = 19$, então $rs = 589$. □

**Exemplo 15.** *A figura abaixo mostra o mapa de ruas de uma cidade. Todas as ruas são de mão única, de modo que você só pode dirigir para o Leste ou para o Norte. Quantos caminhos diferentes existem que, partindo do ponto* $A$*, cheguem ao ponto* $B$*?*




**Solução.** Um possível caminho respeitando as informações do problema seria $LNLNLNLLNLNLL$, em que a letra $L$ representa a direção Leste e a letra $N$ representa a direção Norte. A partir daí, é fácil ver que cada caminho possível corresponde a uma sequência de 13 letras, 8 das quais devem ser iguais a $L$ e 5 iguais a $N$. Portanto, para calcular o total de caminhos, temos de escolher os 5 lugares, dentre os 13 possíveis, nos quais colocaremos as letras $N$ (após feita tal escolha, as posições das letras $L$ estarão completamente determinadas). Como sabemos, o número de modos de fazermos tal escolha é $\binom{13}{5} = 1287$.

Observe que escolher primeiro as 8 posições para as letras $L$ (após o que as posições das 5 letras $N$ estarão completamente determinadas) nos dá o mesmo resultado, uma vez que $\binom{13}{5} = \binom{13}{8}$. □

De uma maneira geral, em um retângulo $m \times n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, o total de caminhos satisfazendo as condições do exemplo anterior é

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

.

Outra técnica muito útil em Combinatória é o **princípio da inclusão-exclusão** uma fórmula que permite contar o total de elementos da *união finita* de conjuntos finitos.

Os casos mais simples se referem aos números de elementos da união de dois ou três conjuntos finitos, nos quais o princípio da inclusão-exclusão garante que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{3}$$

e

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C), \end{aligned} \tag{4}$$

em que $n(X)$ representa o número de elementos do conjunto finito $X$.

Para verificar (3), basta observar que a soma $n(A)+n(B)$ conta todos os elementos de $A \cup B$, mas os elementos de $A \cap B$ são contados exatamente duas vezes e, por isso, devemos descontar $n(A \cap B)$ uma vez.

Por outro lado, para verificar (4), basta aplicarmos (3) três vezes, obtendo

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n((A \cup B) \cup C) \\ &= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) \\ &\quad - n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Vejamos, em dois exemplos simples, como aplicar o princípio da inclusão-exclusão em Combinatória.

**Exemplo 16.** *Numa classe de* 30 *alunos,* 14 *falam inglês,* 5 *falam alemão e* 3 *falam inglês e alemão. Quantos alunos falam pelo menos uma língua, dentre inglês e alemão?*

**Solução.** Seja $I$ o conjunto dos alunos que falam inglês e $A$ o conjunto dos alunos que falam alemão. O que queremos descobrir é o total de alunos que falam pelo menos uma das línguas, ou seja, queremos contar o número de elementos do conjunto $I \cup A$. Como $n(I) = 14$, $n(A) = 5$ e $n(I \cap A) = 3$, segue de (3) que

$$n(I \cup A) = 14 + 5 - 3 = 16.$$

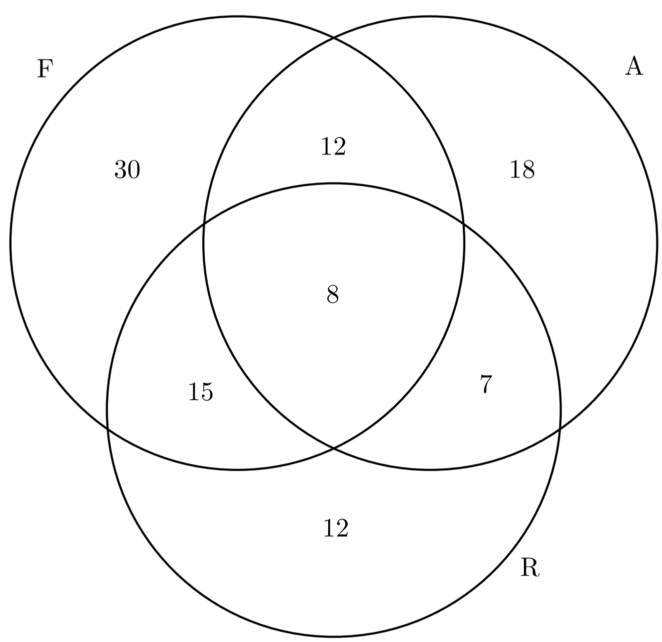
□

**Exemplo 17.** *Em uma faculdade,* 65 *alunos estudam francês,* 45 *estudam alemão,* 42 *estudam russo,* 20 *estudam francês e alemão,* 25 *estudam francês e russo,* 15 *estudam alemão e russo e* 8 *estudam os* 3 *idiomas. Encontre o número de alunos de que estudam pelo menos um, dentre tais idiomas,*

**Solução.** Queremos encontrar $n(F \cup A \cup R)$, onde $F$, $A$ e $R$ denotam os conjuntos de alunos estudando francês, alemão e russo, respectivamente. Pelo princípio da inclusão-exclusão para três conjuntos, temos

$$\begin{aligned} n(F \cup A \cup R) &= n(F) + n(A) + n(R) \\ &\quad - n(F \cap A) - n(F \cap R) - n(A \cap R) \\ &\quad + n(F \cap A \cap R) \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 \\ &= 100. \end{aligned}$$

Uma outra maneira de resolver esse problema seria montar o **diagrama de Venn** abaixo.




Observando que $a+b+d+e = n(F) = 65$, $b+c+e+f = n(A) = 45$, $d+e+f+g = n(R) = 42$, $b+e = n(F \cap A) =$

20, $d+e = n(F \cap R) = 25$, $e+f = n(A \cap R) = 15$ e $e = n(F \cap A \cap R) = 3$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a+b+d+e = 65 \\ b+c+e+f = 45 \\ d+e+f+g = 42 \\ b+e = 20 \\ d+e = 25 \\ e+f = 15 \\ e = 3 \end{cases},$$

o qual pode ser resolvido facilmente e fornece $a = 30$, $b = 12$, $c = 18$, $d = 15$, $e = 8$, $f = 7$ e $g = 12$. Logo,

$$\begin{aligned} n(F \cup A \cup R) &= a+b+c+d+e+f+g \\ &= 30+12+18+12+15+7+8 \\ &= 100. \end{aligned}$$

$\square$

De maneira geral, dados $n$ conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o número de elementos de sua união é

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j} n(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- \sum_{1 \le i < j < k < p} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) \\ &+ \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned}$$

Para uma demonstraçao da fórmula acima, sugerimos ao leitor as referências [1] ou [2].

## Dicas para o Professor

É importante que o professor faça uma rápida revisão das aulas anteriores, para mostrar as diversas aplicações que podem existir. Nesse sentido, uma estratégia útil é apresentar os enunciados de alguns dos exemplos do material a fim de convencer os alunos de que as técnicas de contagem que eles conhecem são aplicáveis à resolução dos mesmos. Ao todo, sugerimos utilizar dois ou três encontros, de 50 minutos cada, para desenvolver todo o conteúdo desse material. Dado o fato de que os argumentos apresentados aqui não são uma novidade para os estudantes, sugerimos fortemente que o professor dê um tempo razoável para os estudantes pensarem nos exemplos a serem discutidos, possivelmente apresentando dicas aos exemplos mais complicados.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. C. Morgado, J. B. P. de Carvalho, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro, IMPA, 2000.

2. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.

3. Cícero Thiago B. Magalhães. Sequência de Fibonacci. Revista Eureka, 21. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

4. Marcelo R. de Oliveira e Manoel L. Carneiro. Coleção Elementos da Matemática, vol. 3. Belém, 2009.