

Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Resolução de Exercícios - Parte 3

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Maio de 2025



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Esta terceira parte da aula “Resolução de Exercícios” é devotada ao estudo de mais alguns gráficos de funções elementares importantes.

No Lema 10 do material “Noções Básicas - Parte 4” deste módulo discutimos o gráfico da função identidade $\text{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\text{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Conforme vimos lá, tal gráfico consiste dos pares ordenados da forma (a, a) , com a variando em $\mathbb{R}$, e, geometricamente, é a *bissetriz dos quadrantes ímpares*. Nós o reproduzimos a seguir:

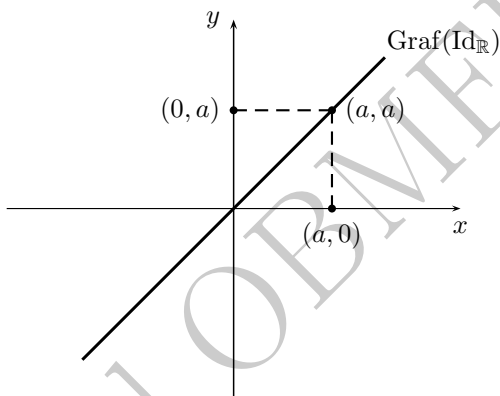


Figura 1: gráfico da função identidade $\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Uma pequena modificação da discussão que levou ao gráfico da função identidade $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ nos permitirá analisar o próximo

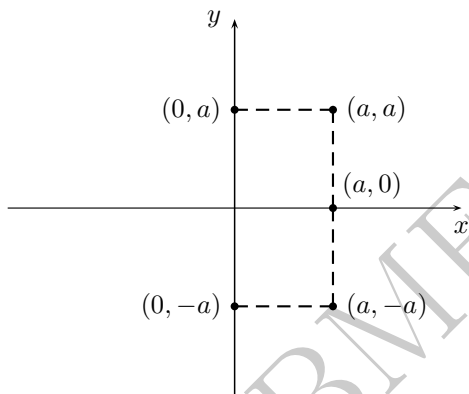
Exemplo 1. Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Como para toda função, temos

$$\begin{aligned}\text{Graf}(f) &= \{(a, f(a)); a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, -a); a \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Agora, veja que, no plano cartesiano, os pontos (a, a) e $(a, -a)$ são *simétricos em relação ao eixo das abscissas*. Isso

significa que a reta que passa por esses dois pontos é perpendicular ao eixo das abscissas e que seu ponto de interseção com tal eixo, o ponto $(a, 0)$, é o ponto médio do segmento que une os pontos (a, a) e $(a, -a)$. Veja a figura a seguir:



Portanto, os pontos do gráfico de f (os pontos $(a, -a)$, com a variando em $\mathbb{R}$) são os simétricos dos pontos do gráfico de $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ (os pontos (a, a) , com a variando em $\mathbb{R}$) em relação ao eixo das abscissas.

Isso garante que o gráfico de f é a reta simétrica à bissetriz dos quadrantes ímpares em relação ao eixo das abscissas. Evidentemente, tal reta é a bissetriz do ângulo formado pelo semieixo positivo das abscissas e pelo semieixo negativo das ordenadas (assim como do ângulo formado pelo semieixo negativo das abscissas e pelo semieixo positivo das ordenadas), sendo, por isso, denominada de *bissetriz dos quadrantes pares*.

A próxima figura traz o gráfico como uma linha contínua. Colocamos também o gráfico de $\text{Id}_{\mathbb{R}}$, pontilhado, a fim de melhor ilustrar a simetria dos dois gráficos em relação ao eixo das abscissas.

□

Para o que próximo exemplo, recorde que o **módulo** de

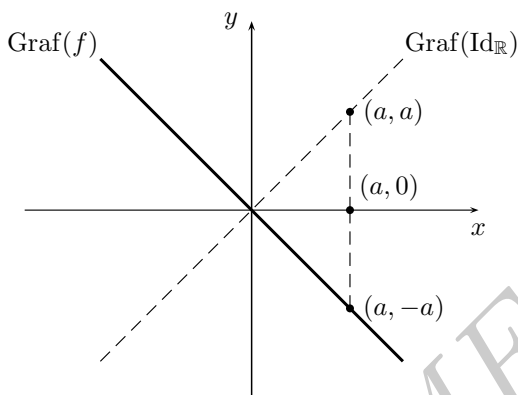


Figura 2: gráfico da função f .

um número real x , denotado $|x|$, é definido como a distância, na reta real, de x a 0.

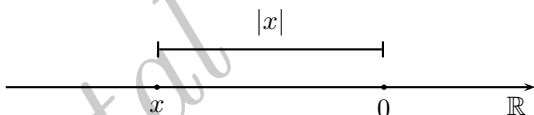


Figura 3: o módulo de um número real.

Assim,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Alternativamente, uma vez que as definições da primeira e terceira linhas acima concordam quando $x = 0$, temos

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Exemplo 2. A *função modular* é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Esboce seu gráfico.

Solução. Como $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, a definição de módulo de um número real garante que

$$\begin{aligned}\text{Graf}(f) &= \{(a, |a|); a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, |a|); a \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(a, |a|); x \in \mathbb{R}_-\} \\ &= \{(a, a); a \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(a, -a); a \in \mathbb{R}_-\}.\end{aligned}$$

Agora, observe que o primeiro conjunto acima, $\{(a, a); a \in \mathbb{R}_+\}$, é a porção do gráfico da função $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ correspondente às *abscissas não negativas*, isto é, a semirreta da bissetriz dos quadrantes ímpares situada no primeiro quadrante do plano cartesiano.

Da mesma forma, o segundo conjunto acima, $\{(a, -a); a \in \mathbb{R}_-\}$, é a porção do gráfico da função f do exemplo anterior correspondente às *abscissas não positivas*, isto é, a semirreta da bissetriz dos quadrantes pares situada no segundo quadrante do plano cartesiano.

Juntando as semirretas descritas nos dois parágrafos anteriores, obtemos o gráfico da função modular (a linha contínua, na figura a seguir):

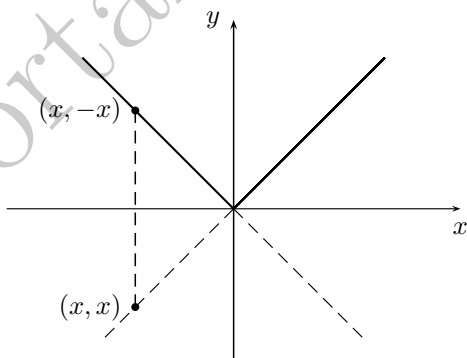


Figura 4: gráfico da função modular $f(x) = |x|$.



Continuando, o próximo exemplo utilizará o gráfico da função identidade $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ para compor o gráfico da função parte fracionária, estudada no Exemplo 15 do material “*Noções Básicas - Parte 1*”. Para tanto, recorde que (de acordo com o Exemplo 14 da parte 1 desse mesmo material) a *parte inteira* de um real x , denotada $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro que não passa de x .

Exemplo 3. *Recorde que a parte fracionária de um real x , denotada $\{x\}$, é definida por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. A função parte fracionária, $\{\cdot\} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, associa a cada $x \in \mathbb{R}$ sua parte fracionária $\{x\}$. Esboce seu gráfico.*

Solução. Para $0 \leq a < 1$, temos $\lfloor a \rfloor = 0$, de modo que

$$0 \leq a < 1 \Rightarrow \{a\} = a - \lfloor a \rfloor = a.$$

Assim, a porção do gráfico da função parte fracionária para a variando no intervalo $[0, 1)$ é formada pelos pares $(a, \{a\}) = (a, a)$, logo, é o segmento situado sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares e ligando os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ (no entanto, note que o ponto $(1, 1)$ não pertence ao gráfico, uma vez que $\{1\} = 0$ e não 1).

No Exemplo 12 do material “*Resolução de Exercícios - Parte 1*” mostramos que a função parte fracionária é periódica, de período 1; em símbolos,

$$\{x + 1\} = \{x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, para $1 \leq a < 2$, temos

$$\{a\} = \{a - 1\};$$

mas, como $0 \leq a - 1 < 1$, segue que $\{a - 1\} = a - 1$, logo,

$$1 \leq a < 2 \Rightarrow \{a\} = a - 1.$$

Dessa forma, a porção do gráfico da função parte fracionária para a variando no intervalo $[1, 2)$ é formada pelos pares $(a, \{a\}) = (a, a - 1)$.

Note que o ponto $(a-1, a-1)$ está situado sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares e o segmento que o liga ao ponto $(a, a-1)$ é paralelo ao eixo das abscissas e tem comprimento $a - (a-1) = 1$. Veja a figura a seguir: Portanto, a porção

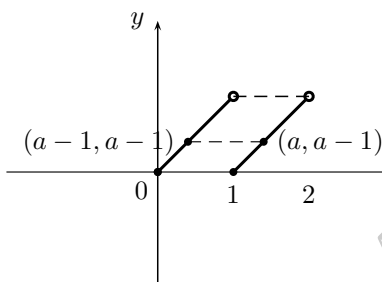


Figura 5: os pontos $(a-1, a-1)$ e $(a, a-1)$.

do gráfico da função parte fracionária sobre o intervalo $[1, 2)$ consiste da *translação, uma unidade para a direita*, da porção do gráfico da função parte fracionária sobre o intervalo $[0, 1)$, conforme também mostrado na figura.

De maneira similar, para $2 \leq a < 3$, temos $0 \leq a-2 < 1$, logo,

$$\{a\} = \{a-1\} = \{a-2\} = a-2;$$

Dessa forma, a porção do gráfico da função parte fracionária para a variando no intervalo $[2, 3)$ é formada pelos pares $(a, \{a\}) = (a, a-2)$.

Por sua vez, o ponto $(a-2, a-2)$ está situado sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares e o segmento que o liga ao ponto $(a, a-2)$ é paralelo ao eixo das abscissas e tem comprimento $a - (a-2) = 2$. Portanto, a porção do gráfico da função parte fracionária sobre o intervalo $[2, 3)$ consiste da *translação, duas unidades para a direita*, da porção do gráfico da função parte fracionária sobre o intervalo $[0, 1)$.

Extrapolando essa análise sucessivamente para os intervalos $[3, 4)$, $[4, 5)$, ... e $[-1, 0)$, $[-2, -1)$, ..., concluímos que,

para $n \in \mathbb{Z}$, a porção do gráfico da função parte fracionária sobre o intervalo $[n, n + 1)$ consiste da translação, n unidades para a direita se $n > 0$ e n unidades para a esquerda se $n < 0$, da porção do gráfico da função parte fracionária sobre o intervalo $[0, 1)$.

Obtemos, então, o esboço a seguir para o gráfico da função parte fracionária: $\square$

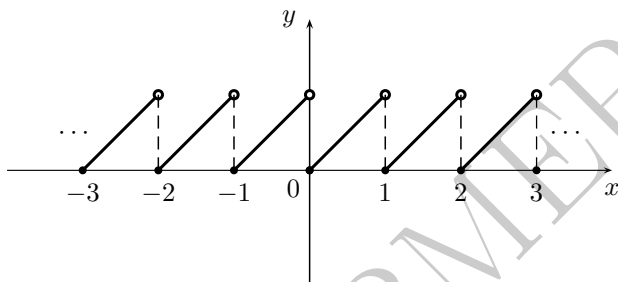


Figura 6: gráfico da função parte fracionária.

A discussão que levou ao gráfico da função parte fracionária pode ser facilmente adaptada para dar os esboços dos gráficos de outras funções. Vejamos um exemplo nesse sentido.

Exemplo 4. Construa os gráficos das funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $f(x) = |x - 2|$ e $g(x) = |x| + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. A figura abaixo mostra, em preto, o gráfico, já apresentado anteriormente, da função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x|$. Mostraremos que o gráfico de f é obtido *movendo* o gráfico de h duas unidades para a direita, paralelamente ao eixo das abscissas; da mesma forma, mostraremos que o gráfico de g é obtido *movendo* o gráfico de h uma unidade para cima, paralelamente ao eixo das ordenadas. Os resultados também são mostrados na figura, em vermelho (para f) e em verde (para g).

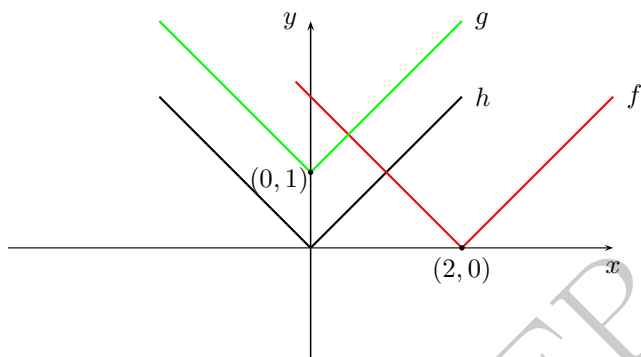


Figura 7: gráficos de f , g e h .

Para justificar a figura anterior, dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in \text{Graf}(f) &\Leftrightarrow b = f(a) \\
 &\Leftrightarrow b = |a - 2| \\
 &\Leftrightarrow b = h(a - 2) \\
 &\Leftrightarrow (a - 2, b) \in \text{Graf}(h).
 \end{aligned}$$

Agora (acompanhe na próxima figura), note que o ponto $(a - 2, b)$ é obtido movendo o ponto (a, b) duas unidades para a *esquerda*, paralelamente ao eixo das abscissas; portanto, o ponto (a, b) é obtido movendo o ponto $(a - 2, b)$ duas unidades para a *direita*, paralelamente ao eixo das abscissas. Fazendo a variar em $\mathbb{R}$, concluimos que o gráfico de f é obtido movendo o gráfico de h duas unidades para a direita, paralelamente ao eixo das abscissas.

Da mesma forma, dados $c, d \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
 (c, d) \in \text{Graf}(g) &\Leftrightarrow d = g(c) \\
 &\Leftrightarrow d = |c| + 1 \Leftrightarrow d - 1 = |c| \\
 &\Leftrightarrow d - 1 = h(c) \\
 &\Leftrightarrow (c, d - 1) \in \text{Graf}(h).
 \end{aligned}$$

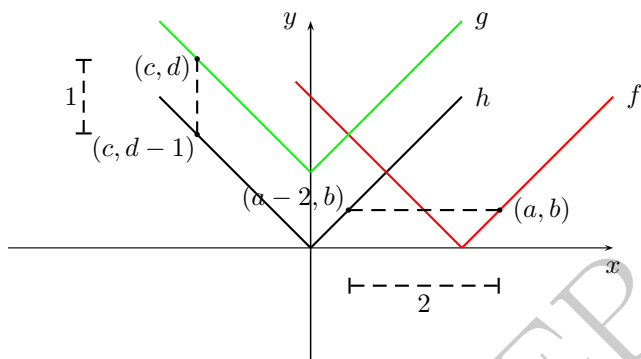


Figura 8: transladando gráficos.

Agora (veja também a próxima figura), perceba que o ponto $(c, d - 1)$ é obtido movendo o ponto (c, d) uma unidade *para baixo*, paralelamente ao eixo das ordenadas; portanto, o ponto (c, d) é obtido movendo o ponto $(c, d - 1)$ uma unidade *para cima*, paralelamente ao eixo das ordenadas. Fazendo c variar em $\mathbb{R}$, concluímos que o gráfico de g é obtido movendo o gráfico de h uma unidade para cima, paralelamente ao eixo das ordenadas. $\square$

Terminamos com um exemplo que aplica o teorema de Pitágoras para esboçar um gráfico aparentemente difícil.

Exemplo 5. *Seja R um real positivo dado. Esboce o gráfico da função $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, para todo $x \in [-R, R]$.*

Solução. Inicialmente, observe que $f(-R) = f(R) = 0$ e $f(0) = R$, de modo que o gráfico de f passa pelos pontos $(-R, 0)$, $(R, 0)$ e $(0, R)$. Mostraremos que o gráfico é o semicírculo de diâmetro ligando os pontos $(-R, 0)$ e $(R, 0)$.

Para tanto, comecemos observando que, se $P(a, b)$ for um ponto do plano cartesiano, então (a, b) é um ponto do gráfico de f se, e somente se, $-R \leq a \leq R$ e $b = \sqrt{R^2 - a^2}$; por

sua vez, essa última igualdade equivale a que $a^2 + b^2 = R^2$ e $b \geq 0$.

Observe, agora, a figura a seguir. Nela, marcamos um ponto $P(a, b)$, com $-R \leq a \leq R$ e $b > 0$, e o ponto $Q(a, 0)$, de forma que o segmento PQ é perpendicular ao eixo das abscissas em Q , com $\overline{PQ} = b$. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo OPQ , temos

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2 &= \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 \\ &= |a|^2 + b^2 = a^2 + b^2,\end{aligned}$$

logo,

$$a^2 + b^2 = R^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = R^2 \Leftrightarrow \overline{OP} = R.$$

Portanto, $P(a, b)$ está sobre o gráfico de f se, e só se, P per-

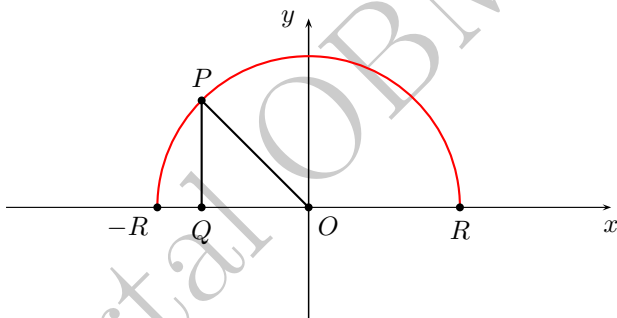


Figura 9: um semicírculo como gráfico de uma função.

tence ao semicírculo de raio R , centrado na origem e tendo os pontos $(-R, 0)$ e $(R, 0)$ como extremidades de um diâmetro (o semicírculo vermelho, na figura). $\square$

Dicas para o Professor

Há muito mais a ser dito sobre gráficos de funções do que fizemos aqui. Por exemplo, não discutimos os gráficos de funções afins nem de funções quadráticas, para citarmos somente dois exemplos que saltam aos olhos quando repasamos a discussão sobre funções feita até aqui.

Tampouco discutimos gráficos de funções pares, ímpares e periódicas, bem como a relação geral entre composição de funções *emovimentos* de gráficos. Tudo isso pode ser feito e empresta uma flexibilidade muito maior à execução da tarefa de esboçar gráficos de funções.

Discutiremos gráficos de funções afins e quadráticas em módulos futuros, do nono ano e do primeiro ano do Ensino Médio. Para compreender as propriedades de gráficos de funções pares, ímpares e periódicas, e a relação entre composição de funções *emovimentos* de gráficos, recomendamos ao leitor a referência [1].

Dois ou três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir este material. Para mais exemplos, veja as referências a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar*, vol. 1. Atual Editora, São Paulo, 2013.