Material Teórico - Módulo Equações do Segundo Grau

Equações de Segundo Grau: outros resultados importantes

Nono Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

Dando continuidade ao estudo das equações do segundo grau, discutiremos relações importantes entre suas raízes e seus coeficientes. Também veremos outras formas comuns de se escrever a equação, bem como alguns problemas onde o objetivo maior não é simplesmente resolver a equação, mas sim fazer uso dessas relações.

2 Relações entre os coeficientes e as raízes

Além da fórmula de Bhaskara, as duas relações mais importantes e famosas sobre equações de segundo grau são as fórmulas para a soma e para o produto de suas raízes em função de seus coeficientes. Deduziremos tais fórmulas nesta seção. Para tanto, comecemos recordando alguns fatos colecionados no material anterior.

Ao longo desta seção, vamos considerar a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$. Lembre-se de que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação e que, quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais. Assim, vamos assumir aqui que $\Delta \geq 0$, e vamos considerar os números reais x_1 e x_2, obtidos pela fórmula de Bhaskara, como segue:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{1}$$

No caso em que $\Delta > 0$, os números x_1 e x_2 são raízes distintas da equação. No caso em que $\Delta = 0$, os valores de x_1 e x_2 são iguais. Neste caso, a equação possui uma única raiz real, mas dizemos que ela é uma *raiz dupla* ou, ainda, uma raiz de multiplicidade dois. Com isso em mente, ao usarmos a expressão “soma das raízes” estamos sempre nos referindo ao valor da soma $x_1 + x_2$, mesmo no caso em que $x_1 = x_2$. De outra forma, a soma é feita considerando-se a multiplicidade das raízes, e uma raiz dupla contribui para a soma duas vezes. Analogamente, o “produto das raízes” sempre se referirá ao número x_1x_2.

De posse das convenções acima, para obter a soma das raízes basta somar membro a membro as igualdades em (1):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) + (-b - \sqrt{\Delta})}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Temos, assim:

A soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, é igual a $-b/a$.

Agora, para obter o produto das raízes, basta multiplicar membro a membro as igualdades em (1) e usar o produto notável da soma pela diferença de dois números para facilitar as contas:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Resumimos os cálculos acima enunciando:

O produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, é igual a c/a.

Fique atento ao sinal negativo na expressão para a soma das raízes e positivo na expressão para o produto das mesmas!

Observação 1. *Apesar de que uma equação de segundo grau possui raízes reais apenas quando $\Delta \geq 0$, independentemente do valor de Δ sempre é possível encontrar raízes no conjunto dos números complexos. Tal conjunto é estudado apenas no final do Ensino Médio e foge do escopo deste texto. Entretanto, vale observar que as expressões obtidas para a soma e o produto das raízes são válidas mesmo no caso em que $\Delta < 0$, desde que levemos em conta as raízes complexas (e suas multiplicidades).*

Exemplo 2. *Encontre a soma e o produto das raízes de cada uma das seguintes equação do segundo grau:*

(a) $3x^2 + 11x + 7 = 0$.

(b) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

(c) $x^2 - 12x = 0$.

(d) $16 - 4x - x^2 = 0$.

Solução.

(a) Obtemos diretamente que a soma é $-11/3$ e o produto é $7/3$. Veja que isso é bem mais rápido do que se tivéssemos primeiro que calcular cada uma das raízes para depois efetuar a soma e o produto entre elas.

(b) A soma é $-(-6)/1 = 6$, e o produto é $9/1 = 9$. Este item merece que discutamos um pouco mais o resultado obtido. Veja que, aqui, temos $\Delta = 0$. Usando a fórmula de Bhaskara, vemos que a única raiz é o número 3, de sorte que 3 é uma raiz dupla. Por isso, a soma das raízes (com multiplicidade) é igual a $3+3=6$, enquanto o produto é igual a $3 \cdot 3 = 9$.

(c) Note que $a=1$, $b=-12$ e $c=0$. Neste caso, a soma das raízes é $-(-12)/1 = 12$ e produto é $0/1 = 0$. De fato, as raízes são 0 e 12.

(d) Cuidado, pois, a equação está escrita em uma ordem não usual: veja que $a=-1$, $b=-4$ e $c=16$. Sendo assim, a soma das raízes é $-(-4)/(-1) = -4$ e o produto é $16/(-1) = -16$.

□

Voltando à equação genérica $ax^2+bx+c=0$, veja que, como $a \neq 0$, temos a seguinte equivalência:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0.$$

Agora, denotando por S e P, respectivamente, o valor da soma e do produto das raízes, temos $S=-b/a$ e $P=c/a$, de sorte que a última equação acima pode ser escrita como:

$$x^2-Sx+P=0. \tag{2}$$

Essa maneira de "*ver*" a equação de segundo grau $ax^2+bx+c=0$ é bastante útil se quisermos tentar encontrar suas raízes "*de cabeça*", isto é, sem utilizar a fórmula de Bhaskara. Por exemplo, para encontrar as raízes da equação $x^2-5x+6=0$, basta (de acordo com (2)) procurarmos dois números reais cuja soma é igual a 5 e cujo produto seja igual a 6. Após um momento de reflexão (e algumas tentativas e erros), percebemos que os números procurados são 2 e 3, de forma que esses dois números são as raízes da equação. É claro que esse método não é muito útil se os coeficientes forem muito grandes ou se as raízes não forem números inteiros. Por outro lado, lembre-se de que, mesmo quando as raízes são números inteiros, estes podem ser positivos ou negativos.

Exemplo 3. *Sabendo que as raízes da equação $x^2+2x-15=0$ são números inteiros, encontre estes números sem usar a fórmula de Bhaskara.*

Solução. Veja que a soma das raízes é igual a -2 e seu produto é igual a -15. Como o produto é negativo e as raízes são reais, uma delas deve ser positiva e a outra negativa. Ademais, ambas pertencem ao conjunto dos divisores de 15: $\{-15,-5,-3,-1,1,3,5,15\}$. Uma análise de casos mostra que, para a soma ser -2 e o produto ser -15, as raízes precisam ser -5 e 3. □

A equação (2) também pode ser utilizada para solucionar o seguinte problema inverso: dados dois números reais, encontrar uma equação de segundo grau que possui estes dois números como raízes[1].

Exemplo 4. *Escreva uma equação de segundo grau que tenha como raízes os número -20 e 4.*

Solução. A soma das raízes é $S=(-20)+4=-16$, e o seu produto é $P=(-20)\cdot 4 = -80$. Uma equação que resolve o problema é: $x^2-Sx+P=0$, ou seja, $x^2-(-16)x+(-80)=0$. Simplificando, obtemos:

$$x^2+16x-80=0.$$

□

Observação 5. *A solução do problema anterior não é única. De fato, há infinitas outras equações de segundo grau que também têm os números -20 e 4 como raízes. Por exemplo, $2x^2+32x-160=0$ é uma delas. Em geral, basta multiplicar os dois lados de $x^2+16x-80=0$ por qualquer número real diferente de zero. Além disso, poderíamos reordenar os termos, passá-los de um lado para o outro (invertendo-se seus sinais), fatorar um dos lados da equação, etc. Por outro lado, a solução que obtivemos é a única no formato $x^2-Sx+P=0$.*

Exemplo 6. *Sejam a e b as raízes da equação*

$$x^2-5x+4=0.$$

Escreva uma equação de segundo grau cujas raízes são $a+1$ e $b+1$.

Solução 1. Note que a equação do enunciado já está no formado $x^2-Sx+P=0$ (em particular, atente para o fato de que o coeficiente de x^2 é igual a 1). Sendo assim, a soma das raízes é $a+b=5$ e o produto delas é $ab=4$.

Para construir uma equação com raízes $a+1$ e $b+1$, basta ver que:

$$(a+1)+(b+1)=a+b+2=7$$

e

$$(a+1)(b+1)=ab+(a+b)+1=4+5+1=10.$$

Logo, uma equação que satisfaz o enunciado é:

$$x^2-7x+10=0.$$

□

Solução 2. Resolvendo a equação $x^2-5x+4=0$, obtemos que suas raízes são $a=1$ e $b=4$ (ou vice-versa). Isso pode ser obtido pela fórmula de Bhaskara ou de cabeça, procurando-se por dois números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 4. Resta construir uma equação de segundo

[1] Observe que pelo recurso a esse problema inverso é que seu professor consegue criar rapidamente uma equação de segundo grau para a qual ele já conhece a solução.

grau cujas raízes sejam $a+1$ e $b+1$, ou seja, 2 e 5. Concluímos que uma tal equação é:

$$x^2 - (2+5)x + (2 \cdot 5) = 0,$$

ou seja, $x^2 - 7x + 10 = 0$. □

Exemplo 7. *Indique qual das equações abaixo possui como raízes os números $x_1 = 3$ e $x_2 = 1/3$:*

(a) $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

(b) $-3x^2 + 10 + 3 = 0$.

(c) $x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$.

(d) $-x^2 + \frac{10}{3}x - 1 = 0$.

Solução. Como $x_1 + x_2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ e $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, segue que uma equação possível é:

$$x^2 - \frac{10x}{3} + 1 = 0.$$

Observe que a equação do item (d), pode ser obtida multiplicando-se a equação que obtivemos acima por -1. Além disso, nenhum dos demais itens é uma equação válida: de fato, as equações dos itens (a) e (c) não são soluções, pois ambas possuem como soma de suas raízes o número $-10/3$; o item (b) também não é solução, pois possui como produto de suas raízes o número $3/(-3) = -1$.

Logo, a resposta correta é o item (d). □

3 Forma fatorada

Substituindo S por $x_1 + x_2$ e P por x_1x_2 em (2) e fatorando a expressão obtida, obtém-se uma terceira maneira de expressar nossa equação original $ax^2 + bx + c = 0$. Vejamos:

$$\begin{aligned} x^2 - Sx + P = 0 &\iff x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0 \\ &\iff x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0 \\ &\iff x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0 \\ &\iff (x - x_1)(x - x_2) = 0. \end{aligned}$$

A expressão $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ é conhecida como a *forma fatorada* da equação de segundo grau. É bem interessante lembrar que o produto de dois números reais é zero se e só se um deles for zero. Logo, a igualdade acima acontece se e só se $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$, ou seja, quando $x = x_1$ ou $x = x_2$ (como era esperado, já que estas são as únicas raízes da equação original).

3.1 Somas de potências das raízes

Para simplificar a notação, nesta seção chamaremos de r e s as raízes da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. Para n natural, vamos denotar por S_n o valor de $r^n + s^n$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} S_1 &= r + s, \\ S_2 &= r^2 + s^2, \\ S_3 &= r^3 + s^3. \end{aligned}$$

Já vimos que $S_1 = -b/a$. Queremos, agora, encontrar uma maneira de expressar S_n em termos dos números a, b, c e n. É claro que poderíamos encontrar r e s pela fórmula de Bhaskara e, em seguida, substituir estes valores na expressão para S_n. Contudo, nosso objetivo é encontrar uma maneira de calcular S_n que seja mais simples do que esta. Vejamos como obter S_2. Como r e s são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$\begin{cases} ar^2 + br + c = 0 \\ as^2 + bs + c = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Somando estas duas igualdades, obtemos

$$a(r^2 + s^2) + b(r + s) + 2c = 0,$$

de sorte que

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0. \tag{4}$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} aS_2 = -bS_1 - 2c \Leftrightarrow S_2 &= \frac{-b}{a}S_1 - \frac{2c}{a} \\ \Leftrightarrow S_2 &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \\ \Leftrightarrow S_2 &= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}. \end{aligned}$$

De forma geral, para $n \geq 3$, multiplicando-se as igualdades em (3) por r^{n-2} e s^{n-2}, respectivamente, obtemos:

$$\begin{cases} ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = 0 \\ as^n + bs^{n-1} + cs^{n-2} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Somando-se as duas igualdades acimas, chegamos a

$$a(r^n + s^n) + b(r^{n-1} + s^{n-1}) + c(r^{n-2} + s^{n-2}) = 0$$

ou, o que é o mesmo, a

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0, \tag{6}$$

para todo $n \geq 3$.

Observe que, adotando a convenção de que $S_0 = 2$ e comparando as relações (4) e (6), vemos que (6) também funciona no caso em que $n = 2$.

Observação 8. *Quando c é diferente de zero, temos que o produto das raízes é diferente de zero e, portanto, ambas as raízes, r e s, são não nulas. Isso torna natural a escolha de $S_0 = 2$, uma vez que $r^0 + s^0 = 1 + 1 = 2$, independentemente dos valores não nulos de r e s. Por outro lado, se $r = 0$ ou $s = 0$, não é possível calcular $r^0 + s^0$, uma vez que 0^0 é uma* indeterminação, *i.e., não tem sentido matemático. Neste caso, por simplicidade, manteremos a convenção de que $S_0 = 2$, mas não poderemos dizer que S_0 seja igual a $r^0 + s^0$.*

A seguir, veremos alguns exemplos de aplicação das ideias acima.

Exemplo 9. *Sejam r e s as raízes da equação $x^2-x-1 = 0$. Encontre o valor de $r^4 + s^4$.*

Solução. Estamos considerando a equação $ax^2+bx+c = 0$, onde $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$. Temos que $S_0 = 2$ e $S_1 = -\frac{-1}{1} = 1$. Por outro lado, para $n \geq 2$ temos:

$$\begin{aligned} aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0 &\Leftrightarrow S_n - S_{n-1} - S_{n-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow S_n = S_{n-1} + S_{n-2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, calculamos sucessivamente:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + S_0 = 1 + 2 = 3; \\ S_3 &= S_2 + S_1 = 3 + 1 = 4; \\ S_4 &= S_3 + S_2 = 3 + 3 = 7. \end{aligned}$$

Concluímos, pois, que $r^4 + s^4 = 7$. □

Observação 10. *No exemplo anterior, podemos calcular que $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, de modo que*

$$r^4 + s^4 = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^4 + \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^4.$$

Então, é claro que teríamos bem mais trabalho para calcular o valor de $r^4 + s^4$ diretamente a partir da igualdade acima.

Problema 11. *A soma dos cubos das raízes da equação $x^2 + x - 3 = 0$ é igual a:*

(a) -10.

(b) -8.

(c) -12.

(d) -6.

Solução. O item correto é o item (a). De fato, seguindo o modelo de solução do exemplo anterior, obtemos sucessivamente $S_1 = -1$, $S_2 = 7$ e $S_3 = -10$. □

Uma maneira alternativa de se calcular os valores de S_2 e S_4 é obtida utilizando duas vezes a igualdade

$$u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv, \tag{7}$$

para u e v números reais.

Para S_2, e com $u = r$, $v = s$, ela nos dá

$$\begin{aligned} S_2 &= r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs \\ &= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}. \end{aligned}$$

Veja que esta é a mesma fórmula que havíamos obtido anteriormente.

De forma semelhante, para S_4 (com $u = r^2$ e $v = s^2$) temos que:

$$\begin{aligned} S_4 &= r^4 + s^4 = (r^2 + s^2)^2 - 2r^2s^2 \\ &= (S_2)^2 - 2(rs)^2 \\ &= \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Exemplo 12. *Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $2x^2 - 8x - 2220$.*

Solução. Sendo r e s as raízes, sua soma é $r + s = -(-8)/2 = 8/2 = 4$, ao passo que seu produto é $rs = -2220/2 = -1110$. Utilizando (7) (novamente com $u = r$, $v = s$), encontramos o valor da soma dos quadrados:

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= (r + s)^2 - 2rs \\ &= 4^2 - 2(-1110) \\ &= 16 + 2220 \\ &= 2236. \end{aligned}$$

□

Problema 13. *Sendo m e n as raízes da equação de segundo grau $x^2 - 10x + 1 = 0$, calcule $\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{m^4}$.*

Solução 1. Veja que

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = \frac{m^4 + n^4}{n^4m^4} = \frac{m^4 + n^4}{(mn)^4}.$$

Como m e n são raízes de $x^2 - 10x + 1 = 0$, temos que $mn = 1/1 = 1$. Portanto,

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = m^4 + n^4.$$

Pprocedendo como nos exercícios anteriores. temos $S_0 = 2$, $S_1 = 10$ e, para $n \geq 2$ inteiro:

$$S_n - 10S_{n-1} + S_{n-2} = 0 \implies S_n = 10S_{n-1} - S_{n-2}.$$

Portanto,

$$S_2 = 10 \cdot 10 - 2 = 98;$$
$$S_3 = 10 \cdot 98 - 10 = 970;$$
$$S_4 = 10 \cdot 970 - 98 = 9602.$$

Logo,

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = 9602.$$

□

Solução 1. Alternativamente, partindo de $\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = m^4 + n^4$ e utilizando (7) duas vezes (primeiramente com $u = m$, $v = n$, em seguida com $u = m^2$, $v = n^2$), obtemos

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= (m+n)^2 - 2mn \\ &= 10^2 - 2 \cdot 2 = 98 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m^4 + n^4 &= (m^2+n^2)^2 - 2m^2n^2 \\ &= 98^2 - 2 \cdot 1^2 \\ &= 9604 - 2 = 9602. \end{aligned}$$

□

4 Equações biquadradas

Uma equação do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, em que $a \neq 0$, é chamada de **equação biquadrada**. Observe que uma equação biquadrada é uma equação polinomial de grau 4. Em geral, equações de grau 4 podem ser bem mais complicadas de resolver. Contudo, no caso de uma equação biquadrada, todos os expoentes de x são números pares, e com uma simples substituição de variáveis podemos obter uma equação de grau 2. Basta fazer $y = x^2$ para obter:

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 + c = 0 &\implies a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \\ &\implies ay^2 + by + c = 0. \end{aligned}$$

A última equação acima é de segundo grau e, portanto, pode ser resolvida facilmente pela fórmula de Bhaskara. Depois de encontramos os possíveis valores de y, encontramos x fazendo $x = \pm\sqrt{y}$ para cada um dos valores *não negativos* que y possa assumir.

Exemplo 14. *Encontre todas as raízes da equação*

$$-2x^4 + 14x^2 - 24 = 0.$$

Solução. Dividindo ambos os lados da equação por -2, obtemos a equação equivalente mais simples: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. Fazendo a substituição $y = x^2$, obtemos:

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

As raízes desta equação são $y_1 = 3$ e $y_2 = 4$. Como ambas são positivas, temos quatro possíveis valores reais para x que satisfazem a equação original, a saber: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -2$ e $x_4 = 2$. □

É claro que, como $y = x^2$, se alguma das raízes da equação $ay^2 + by + c = 0$ for negativa, esta raiz não irá produzir nenhum valor real para x que seja solução da equação biquadrada original. Por outro lado, quando y for zero, a única opção será x igual a zero também.

5 Sistemas

Equações de segundo grau são, por vezes, bastante úteis na análise de sistemas de equações de duas incógnitas. Vejamos dois exemplos nesse sentido.

Exemplo 15. *Resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Solução 1. A segunda equação nos dá $y = 6 - x$. Substituindo este valor na primeira equação do sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + (6-x)^2 = 20 &\Leftrightarrow x^2 + (36 - 12x + x^2) = 20 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0. \end{aligned}$$

Temos, então, uma equação de segundo grau onde $a = 1$, $b = -6$ e $c = 8$. Usando a fórmula de Bhaskara, calculamos $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$ e, a partir daí:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} = 4, \quad \text{ou} \\ \dfrac{6-2}{2} = 2. \end{cases}$$

Quando $x = 4$, obtemos $y = 6 - x = 6 - 4 = 2$; quando $x = 2$, obtemos $y = 6 - x = 6 - 2 = 4$. Sendo assim, os possíveis pares ordenados (x, y) que resolvem o sistema são $(4, 2)$ ou $(2, 4)$. □

Solução 2. Veja que

$$\begin{aligned} 2xy &= (x+y)^2 - (x^2 + y^2) \\ &= 6^2 - 20 = 16. \end{aligned}$$

Logo, $xy = 8$. Lembrando que $x + y = 6$, temos que x e y são as raízes da equação do segundo grau

$$z^2 - 6z + 8 = 0.$$

Estas raízes são 2 e 4, de forma que $x = 2$ e $y = 6 - 2 = 4$, ou $x = 4$ e $y = 6 - 4 = 2$. □

Exemplo 16. *Resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 18 \\ x - y = -3. \end{cases}$$

Solução. A partir da segunda equação, obtemos $x = y-3$. Substituindo essa expressão para x na primeira equação, segue que:

$$\begin{aligned}(y-3)^2 + 2y^2 = 18 &\Leftrightarrow (y^2 - 6y + 9) + 2y^2 = 18\\ &\Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 9 = 0\\ &\Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0.\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara (ou procurando mentalmente dois números cuja soma seja 2 e cujo produto seja -3), obtemos que os possíveis valores para y são 3 e -1. No caso em que $y = 3$, obtemos $x = 3 - 3 = 0$; no caso em que $y = -1$, obtemos $x = -1 - 3 = -4$. Sendo assim, os possíveis valores para o par ordenado (x, y) são $(0, -3)$ ou $(-4, -1)$. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja tratado em três encontros de 50 minutos e que, além disso, seja dedicado outro encontro para a resolução de exercícios mais avançados. O Caderno de Exercícios deste módulo, em especial, possui uma grande quantidade de exercícios já resolvidos e que *não são* meras aplicações da fórmula de Bhaskara.

Fórmulas para a soma e o produto das raízes de uma equação polinomial de grau qualquer também são conhecidas. Para um polinômio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, a soma das raízes de $p(x) = 0$ é igual a $-a_{n-1}/a_n$, enquanto o produto das raízes é igual a $(-1)^n a_0/a_n$. Existem, ainda, relações dos demais coeficientes com outras somas de produtos das raízes. Tais relações, inclusive aquelas do caso em que $n = 2$, são conhecidas pelo nome *relações de Viète-Girard*.

As referências abaixo discutem equações de segundo grau exaustivamente.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.